

文章编号: 1001-2486 (2002) 01-0022-04

## 基于混合变量传递函数方法的圆柱壳屈曲分析\*

李道奎, 周建平, 雷勇军

(国防科学技术大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 提出了一种分析正交各向异性圆柱壳和阶梯圆柱壳稳定性问题的混合变量传递函数方法。首先在壳体环向利用三角级数对位移变量进行展开, 利用 Flügge 薄壳理论和变分原理, 建立圆柱壳的平衡方程, 找出对偶力变量, 将平衡方程写成混合变量形式; 通过定义混合状态变量, 建立了系统的状态空间方程; 然后利用传递函数方法, 得到了具有任何轴对称边界条件轴压圆柱壳屈曲问题的解析解; 最后通过位移连续和力平衡条件, 得到了阶梯圆柱壳屈曲问题的解。理论解推导过程表明此方法在引入边界条件和进行阶梯圆柱壳求解时非常方便。算例分析的结果验证了本方法的正确性。

**关键词:** 混合变量; 传递函数; 屈曲; 状态空间

**中图分类号:** O34      **文献标识码:** A

## Buckling Analysis of Cylindrical Shell Based on Mixed Variables Transfer Function Method

LI Dao-kui, ZHOU Jian-ping, LEI Yong-jun

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A mixed variables transfer function is presented for analyzing the stability of orthotropic cylindrical shells and stepped cylindrical shells. First, displacement variables are expanded in trigonometric series of circumferential coordinate. Flügge thin shell theory and variational principle are adopted to obtain governing equations and find dual force variables. Consequently, governing equations are written in the form of mixed variables. State-space equation of the system is established by defining mixed state variables. Then, by transfer function method, closed-form solutions for buckling problems of cylindrical shells under axial compression with arbitrary axisymmetric boundary conditions are obtained. Finally, solutions for buckling problems of stepped cylindrical shells are obtained by enforcing displacement continuity and force balance. Deriving process of analytical solutions show that it is very convenient for introducing boundary conditions and solving the buckling problems of stepped cylindrical shells in this method. Numerical results validate this method.

**Key words:** mixed variables; transfer function; buckling; state-space

复合材料圆柱壳在各种航空器和导弹结构中越来越多地用作一种基本的承力构件, 其稳定性分析受到了国内外学者和工程师的关注<sup>[1~4]</sup>。这些学者和工程师的研究结果都是基于位移变量得出的, 在引入边界条件和进行阶梯圆柱壳求解显得较复杂。本文提出了一种基于混合变量的传递函数方法, 研究了正交各向异性圆柱壳和阶梯圆柱壳的稳定性问题。

### 1 混合变量平衡方程的建立

考虑如图 1 所示长为  $L$ 、半径为  $R$ 、厚度为  $h$  的圆柱壳, 其边界条件是轴对称的, 且在轴向承受均匀正压力。忽略剪切变形的影响, 其中面位移分量可设为

$$[u \quad w] = [u(x) \quad w(x)] \cos\left(\frac{m\theta}{R}\right) \quad (1a)$$

$$v = v(x) \sin\left(\frac{m\theta}{R}\right) \quad (1b)$$

\* 收稿日期: 2001-08-29  
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (19925209)  
作者简介: 李道奎 (1971—), 男, 博士生。

其中,  $n$  代表圆柱壳屈曲时的环向波数。

根据 Flügge 薄壳理论, 几何关系为:

$$\varepsilon_1 = (u_{,x} - zw_{,xx}) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2a)$$

$$\varepsilon_2 = (v_{,y} - zw_{,yy} + \frac{w}{R} + \frac{zw_{,y}}{R} = \left[ \left[ \frac{n}{R}v + \frac{w}{R} \right] + z \left[ \frac{n^2}{R^2}w + \frac{n}{R^2}v \right] \right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2b)$$

$$\varepsilon_6 = (u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + \frac{z}{R}v_{,x} = \left[ -\frac{n}{R}u + v_{,x} + z \left[ \frac{2n}{R}w_{,x} + \frac{1}{R}v_{,x} \right] \right) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (2c)$$

对于正交各向异性材料, 本构关系为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix}, \quad \sigma_6 = Q_{66}\varepsilon_6 \quad (3)$$

内力素为:

$$N_{ik} = \int_z \sigma_z^k dz \quad i = 1, 2, 6, k = 0, 1 \quad (4)$$

设圆柱壳轴向受正压力  $p$ , 取广义位移变量为:  $\mathbf{e} = \{u \quad -w_{,x} \quad v \quad w\}^T$ ,  $T$  表示矩阵或向量的转置, 则圆柱壳的能量泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_x \int_y \left[ \int_z \sigma_i \varepsilon_i dz - ph(w_{,x})^2 \right] dy dx = \int_x L_R(\mathbf{e}, \mathbf{e}') dx \quad i = 1, 2, 6 \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}_{,x}$ 。取广义位移  $\mathbf{e}$  对应的对偶广义力变量为:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L_R}{\partial \mathbf{e}} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\}^T = \left\{ N_{10} \quad N_{11} \quad N_{60} + \frac{1}{R}N_{61} \quad N_{11,x} + \frac{2n}{R}N_{61} - phw_{,x} \right\}^T \quad (6)$$

基于混合变量的能量变分为

$$\delta \Pi = \int_x \int_y \left[ \int_z \sigma_i \delta \varepsilon_i dz - phw_{,x} \delta w_{,x} \right] dy dx = \int_x H(N_{ik}, \mathbf{e}, \mathbf{e}') dx \quad (7)$$

其中,  $i = 1, 2, 6, k = 0, 1$ , 函数  $H(N_{ik}, \mathbf{e}, \mathbf{e}')$  的具体形式略。

由变分原理得平衡方程为

$$N_{10,x} + \frac{n}{R}N_{60} = 0 \quad (8a)$$

$$N_{60,x} + \frac{1}{R}N_{61,x} - \frac{n}{R}N_{20} - \frac{n}{R^2}N_{21} = 0 \quad (8b)$$

$$N_{11,xx} + \frac{2n}{R}N_{61,x} - phw_{,xx} + \frac{1}{R}N_{20} + \frac{n}{R^2}N_{21} = 0 \quad (8c)$$

取  $\mathbf{f} = \{N_{20} \quad N_{21} \quad N_{60} \quad N_{61}\}^T$ , 由内力与位移关系式 (4) 可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}_1 \mathbf{f} + \mathbf{B}_2 \mathbf{e} \quad (9a)$$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{B}_3 \mathbf{f} + \mathbf{B}_4 \mathbf{e} \quad (9b)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{B}_1$ 、 $\mathbf{B}_2$ 、 $\mathbf{B}_3$  和  $\mathbf{B}_4$  的具体形式略。

由平衡方程 (8) 和  $\mathbf{f}$  中关于  $N_2$ 、 $N_4$  的定义可以得到矩阵形式的平衡方程

$$\mathbf{f}_{,x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{f} + \mathbf{C}_2 \mathbf{f} + \mathbf{C}_3 \mathbf{e} \quad (10)$$

其中, 矩阵  $\mathbf{C}_1$ 、 $\mathbf{C}_2$  和  $\mathbf{C}_3$  的具体形式略。

将 (9a) 代入 (10) 可以得到用广义位移和广义力表示的平衡方程

$$\mathbf{f}_{,x} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_1) \mathbf{f} + (\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2) \mathbf{e} \quad (11)$$

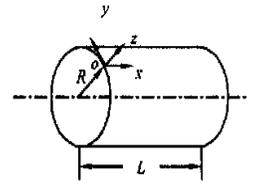


图 1 圆柱壳示意图

Fig. 1 A cylindrical shell

## 2 状态空间方程及其传递函数解

定义混合状态变量为:  $\boldsymbol{\eta} = \{\mathbf{e}^T \quad \mathbf{f}^T\}^T$ , 利用式 (9b) 和方程 (11), 得到由混合状态变量表示的

控制方程

$$\eta_{,x} = S\eta \quad (12)$$

式中,  $S = \begin{bmatrix} B_4 & B_3 \\ C_{3+} & C_2 B_2 \\ C_{1+} & C_2 B_1 \end{bmatrix}$ 。对应的矩阵形式的边界条件为

$$M_b \eta(0) + N_b \eta(L) = \gamma \quad (13)$$

对于九种边界条件<sup>[3]</sup>, 边界矩阵  $M_b$  和  $N_b$  中的元素都为 0 或 1。

由方程 (12) 和边界条件 (13) 组成的边值问题, 采用分布参数传递函数方法<sup>[3]</sup>, 可以得到精确解为:

$$\eta = H(x)\gamma \quad (14)$$

这里,  $H(x) = e^{Sx} (M_b + N_b e^{SL})^{-1}$  为边界分布传递函数。

对于复合材料圆柱壳的屈曲问题, 其特征方程为

$$\left| M_b + N_b e^{SL} \right| = 0 \quad (15)$$

求解方程 (15) 可得到屈曲载荷  $P_{cr}$ , 将所得的屈曲载荷代入 (14), 可求得对应于  $P_{cr}$  的屈曲模态。

### 3 阶梯变厚度圆柱壳的屈曲分析

如图 2 所示的阶梯圆柱壳, 由  $n_s$  个半径为  $R$  的圆柱壳子段组成, 每段的长度为  $l_i$ , 厚度为  $h_i$ 。同一子段内的材料和几何参数相同, 而不同子段内的材料和几何参数可以不同。对于阶梯圆柱壳, 不能直接用上节的方法进行求解, 但对任一子段  $i$ , 上节的解仍然成立。利用 (14) 式, 子段  $i$  的解可写为

$$\eta_i = e^{s_i x} \eta_i^0 \quad (16)$$

这里,  $x$  是子段的局部坐标系,  $\eta_i^0$  为积分常向量。阶梯圆柱壳的两端的边界条件可写为

$$M_b \eta_1(0) + N_b \eta_{n_s}(l_{n_s}) = \gamma \quad (17)$$

由混合状态变量的定义, 各子段间的位移连续和力平衡条件可写为

$$\eta_i(l_i) = \eta_{i+1}(0) \quad (18)$$

取结构常向量为:  $\eta^0 = \{(\eta_1^0)^T \dots (\eta_{n_s}^0)^T\}^T$ , 则由式 (16) ~ 式 (18) 组成关于  $\eta^0$  的线性代数方程组:

$$M\eta^0 = q \quad (19)$$

对于阶梯壳屈曲的特征值问题,  $q = 0$ , 此时, 要使方程组 (19) 有非零解, 系数矩阵行列式的值必须为零。即:  $|M| = 0$ , 由此可得到阶梯圆柱壳的屈曲载荷  $p_{cr}$ , 进而可以得到对应于  $p_{cr}$  的屈曲模态。

### 4 数值算例

首先考虑轴压各向同性圆柱壳的屈曲问题。计算中, 边界条件为  $SS$ <sup>[3]</sup>, 壳体的材料和几何参数为,  $E = 100$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $R = L = 100$ ,  $h = 1$ 。表 1 给出了本文计算结果与文献 [3] 计算结果的比较。其中环向波数  $n = 6$ , 相应的轴压临界屈曲载荷为  $p_{160}$ 。

其次, 考虑轴压正交各向异性圆柱壳的屈曲问题。计算中, 边界条件为  $SS$ ,  $CS$  和  $CC$ <sup>[4]</sup>, 壳体的材料和几何参数为,  $E_1 = 40E_2$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_1 = 0.25$ ,  $R = L = 10$ ,  $h = 1$ 。表 2 给出了本文计算结果与文献 [4] 计算结果的比较。从表 1 和表 2 的比较中可以看出, 本文解与文献 [3] 和文献 [4] 中的 Donnell 经典理论解的差别较小, 这说明本文方法的正确性, 其差别是由于所用理论不同, 同时, 通过与高阶理论解的比较可知, 本文解比 Donnell 经典理论解更接近正确解。

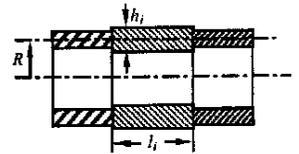


图 2 阶梯圆柱壳

Fig 2 Stepped cylindrical shell

表1 圆柱壳的轴压屈曲载荷  $p_{mn}$ Tab 1 Buckling loads  $p_{mn}$  of cylindrical shell under axial compression

$p_{m6}$ 中的 $m$ 值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
本文解	0.6048	0.6263	0.6375	0.6559	0.6901	0.7293	0.7877	0.8224	0.9139	1.065
文献 [3]	0.6053	0.6267	0.6380	0.6643	0.6904	0.7307	0.7880	0.8251	0.9140	1.0653

表2 正交各向异性圆柱壳的无量纲临界屈曲载荷  $p_{cr} = p_{cr} L^2 / (100h^2 E_2)$ Tab 2 Dimensionless critical buckling loads  $p_{cr} = p_{cr} L^2 / (100h^2 E_2)$  of orthotropic cylindrical shell

	$0^\circ/90^\circ$			$0^\circ/90^\circ/0^\circ$			$0^\circ/90^\circ/\dots$ 共10层		
	SS	SC	CC	SS	SC	CC	SS	SC	CC
本文解	0.1650	0.2143	0.3175	0.4130	0.7408	1.3585	0.3248	0.4877	0.8009
CLT <sup>[4]</sup>	0.1817	0.2286	0.3310	0.4186	0.7457	1.3631	0.3395	0.5000	0.8122
HSDT <sup>[4]</sup>	0.1687	0.2011	0.2617	0.2794	0.3434	0.4213	0.2896	0.3388	0.4037

表3 阶梯圆柱壳的轴压临界屈曲载荷  $p_{cr}$ Tab 3 Critical buckling loads  $p_{cr}$  of stepped cylindrical shell under axial compression

边界条件	SS1	SS2	SS3	SS4	CC1	CC2	CC3	CC4	FF1
$P_{cr}$	0.6263	0.3036	0.6135	0.3035	0.6927	0.6309	0.6748	0.6308	0.0238
$n$	8	1	9	1	8	7	8	7	1

最后, 考虑一个由三个子段组成的阶梯圆柱壳的轴压屈曲问题, 所有子段的半径均为  $R = 100$ , 各子段的几何和材料参数如下:

子段1 或子段3:  $l_1 = 40$ ,  $h_1 = 1$ ,  $E_1 = 100$ ,  $\mu_1 = 0.3$

子段2:  $l_1 = 20$ ,  $h_1 = 3$ ,  $E_1 = 100$ ,  $\mu_1 = 0.3$

由于该方法对各种边界条件均适用, 因此, 分析中考虑了九种边界条件  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$ ,  $S4$ ,  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ ,  $C4$ ,  $F1$ , 其具体定义见文献 [3]。表3给出了各种边界条件下阶梯圆柱壳的临界屈曲载荷及其对应的环向波数。为验证了本文理论推导与计算过程的正确性, 对  $SS3$  和  $CC3$  两种边界条件, 用 NASTRAN 有限元软件对阶梯圆柱壳进行屈曲分析, 其临界屈曲载荷分别为 0.6093 和 0.6723, 这与本文计算结果非常接近, 而且, 对应屈曲模态的环向波数也分别为 9 和 8。

## 5 结论

本文提出了一种基于混合变量的传递函数方法, 用来分析正交各向异性圆柱壳和阶梯圆柱壳的稳定性问题。从理论解推导过程中可以看出, 由于采用了混合变量, 此方法在引入边界条件和进行阶梯圆柱壳的子段综合时非常方便; 同时, 本文方法也很容易推广到复合材料圆柱壳的静力问题和振动问题的研究。从算例分析的结果可以看出, 由于采用了 Flügge 薄壳理论的几何关系, 其结果比 Donnell 理论解更接近于高阶理论解; 阶梯圆柱壳屈曲解的本文解与有限元解符合较好。

## 参考文献:

- [1] Yamada G, Irie T, Tsushima M. Vibration and stability of orthotropic circular cylindrical shells subjected to axial load [J]. J. of Acoustic Society of America, 1984, 75 (3): 842-848.
- [2] Koga T. Effects of boundary conditions on the free vibration of circular cylindrical shells [J]. AIAA J., 1988, 26 (11): 1387-1394.
- [3] Zhou J, Yang B. Distributed transfer function method for analysis of cylindrical shells [J]. AIAA J., 1995, 33 (9): 1698-1708.
- [4] Khleir A A, Reddy J N, Frederick D. A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories [J]. Int. J. Engng Sci., 1989, 27 (11): 1337-1351.