

文章编号: 1001-2486 (2002) 01-0030-04

任意载荷作用下各向异性矩形薄板的弯曲解*

黄炎, 廖瑛, 邱忠升

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 常用的复合材料板多为各向异性板。为求解这种板的弯曲问题, 利用复数形式的三角级数解和双正弦级数解来建立各向异性矩形薄板弯曲问题微分方程的一般解, 可以求解任意载荷作用下各种边界的弯曲问题。以四边固支的正方形板为例进行了数值计算, 其结果与文献比较是一致的。这种一般解析解法理论简单全面, 便于实际应用。

关键词: 各向异性板; 弯曲; 载荷; 边界条件

中图分类号: O343.8 文献标识码: A

The Bending Solution of Anisotropic Thin Plate Acted with Arbitrary Loading

HUANG Yan, LIAO Ying, QIU Zhong-sheng

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Composite material plate usually is anisotropic plate, To solve the bending problem for plate, trigonometric series solution in complex number form and double sine series solution are used to establish a general solution of differential equation for anisotropic thin plates in bending problem. It can be used to solve bending problem for arbitrary loading with whatever boundaries. As an example a square plate with four edges fixed has been calculated. The result agrees with that in literature. This common analytical method is simple and complete, and easy to use in practice.

Key words: anisotropic plate; bending; loading; boundary

随着现代科学技术的发展, 复合材料以其重量轻、比强度和比刚度高, 已广泛应用于航空、航天结构。常用的复合材料板多为各向异性板。Padovan J.^[1, 2]用复数形式的三角级数法求解了圆形板和长条形板的弯曲问题。梁礼平^[3]用边界积分法求解了矩形板的弯曲问题。张承宗, 杨光松^[4]用一般解析法求解了适用于各种边界矩形板的弯曲问题。本文进一步求得了各种载荷作用下矩形板的弯曲问题, 从而得出了各种载荷和各种边界弯曲问题的求解。

1 微分方程的齐次解

均匀材料各向异性矩形薄板 (如图 1) 弯曲挠度函数的微分方程^[5]为:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (1)$$

为满足四边以及四角边界条件最适的一般解, 文献 [4] 选取上式各种齐次解 ($q=0$) 的组合为

$$w_1 = \sum_m \left\{ A_m \sin[\alpha(a-x) + \alpha_1(b-y)] \operatorname{sh} \alpha_2 y + B_m \sin(\alpha + \alpha_1 y) \operatorname{sh} \alpha_2(b-y) \right\} / \operatorname{sh} \alpha_2 b$$

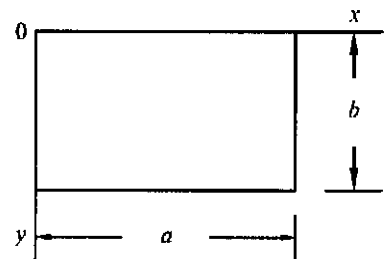


图 1 板的坐标

Fig. 1 Coordinates of plate

* 收稿日期: 2001-06-10

作者简介: 黄炎 (1924-), 男, 教授。

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ C_m \sin[\alpha(a-x) + \alpha_3(b-y)] \operatorname{sh} \alpha_4 y + D_m \sin(\alpha + \alpha_3 y) \operatorname{sh} \alpha_4(b-y) \right\} / \operatorname{sh} \alpha_4 b \\
 & + \sum_n \left\{ E_n \sin[\beta(b-y) + \beta_1(a-x)] \operatorname{sh} \beta_2 x + F_n \sin(\beta y + \beta_1 x) \operatorname{sh} \beta_2(a-x) \right\} / \operatorname{sh} \beta_2 a \\
 & + \left\{ G_n \sin[\beta(b-y) + \beta_3(a-x)] \operatorname{sh} \beta_4 x + H_n \sin(\beta y + \beta_3 x) \operatorname{sh} \beta_4(a-x) \right\} / \operatorname{sh} \beta_4 a \\
 & + [a_{00}(a-x)(b-y) + a_{01}(a-x)y + a_{10}x(b-y) + a_{11}xy] / ab
 \end{aligned} \tag{2}$$

式中 $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为下列方程四个根 α 的实部和虚部 $\alpha_1 \pm i\alpha_2, \alpha_3 \pm i\alpha_4$.

$$D_{11}\alpha^4 + 4D_{16}\alpha^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2 + 4D_{26}\alpha + D_{22} = 0$$

同样, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 为下列方程四个根 β 的实部和虚部 $\beta_1 \pm i\beta_2, \beta_3 \pm i\beta_4$.

$$D_{11}\beta^4 + 4D_{16}\beta^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\beta^2 + 4D_{26}\beta + D_{22} = 0$$

(2) 式具有对板中心对称的优点。根据变分原理, 只要求角点的挠度或反力等于已知值, 故取相应的四个多项式的解。

2 微分方程的特解

(1) 为使求解简单且容易精确, 当载荷沿 x 方向不变时 $q = q(y)$, 可取 $w = w_2(y)$, 代入 (1)

式可得
$$\frac{d^4 w_2}{dy^4} = \frac{q}{D_{22}}$$

上式的一般解和梁的挠度解是相同的。文献 [6] 选取两边简支的无限长条板的解作为载荷的特解。这是因为各向同性板或正交异性板时是最简单的。对各向异性板应选取与 $x = 0$ 和 a 两边相同的边界条件的无限长条板的解则是最有利的。例如在均布载荷 $q = q_0$ 作用下当两对边为固定时可取

$$w_2 = \frac{q_0}{24D_{22}}(b-y)^2 y^2 \text{ 或 } w_2 = \frac{q_0}{24D_{11}}(a-x)^2 x^2 \tag{3}$$

(2) 均布载荷 $q = q_0'$ 时也可简单地令

$$w_2 = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{22}x^2y^2$$

将上式代入 (1) 式可得 $b_{22} = \frac{q_0'}{8(D_{12} + 2D_{66})}$, 其他积分常数可取任意值。若使四边挠度为零时可取, $b_{00} = b_{10} = b_{01} = b_{20} = b_{02} = 0$, $b_{11} = abb_{22}$, $b_{21} = -bb_{22}$, $b_{12} = -ab_{22}$, 即

$$w_2 = \frac{q_0'(a-x)x(b-y)y}{8(D_{12} + 2D_{66})} \tag{4}$$

(3) 一般来说, 可取双正弦级数解作为特解。不过这种解并不等于四边简支时的解, 令

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \tag{5}$$

将上式代入 (1) 式并令:

$$q = \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y; \quad \cos \frac{i\pi x}{a} \cos \frac{j\pi y}{b} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y;$$

式中 $B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \alpha x \sin \beta y dx dy$; $C_{mn} = \frac{16mn}{\pi^2(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)}$;

仅当 $i + m$ 和 $j + n$ 均为奇数时, 否则 $C_{mn} = 0$, 又 $i, j = 1, 2, 3 \dots$, 由此可得

$$A_{mn} [D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4] - \sum_i \sum_j A_{ij} [4D_{16}(i\pi/a)^3(j\pi/b) + 4D_{26}(i\pi/a)(j\pi/b)^3]$$

$$\frac{16mn}{\pi^2(m^2 - i^2)(n^2 - j^2)} = B_{mn}$$

例如均布载荷 q_0'' , 集中力 p 作用在 (a_1, b_1) 点时

$$B_{mn} = 4q_0''(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi) / mn\pi^2 \tag{6}$$

$$B_{mn} = 4p \sin \alpha_1 \sin \beta_1 / ab \quad (7)$$

若分布力作用在板的 $x \leq a/2$ 和 $y \leq b/2$ 为 $q = 4pxy/ab$, 其他部分与之对称, 则

$$B_{mn} = \frac{64p}{(mn\pi)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (8)$$

当板上的总载荷相同时, 以上三种应有 $q_0'' ab = p = 4pab$

3 算例和分析

微分方程的一般解为 $w = w_1 + w_2$ 。 w_1 中的积分常数由边界条件和角点条件来决定。以四边固支的板为例, 边界条件和角点条件分别为

$$(w)_{x=0} = 0, (w)_{x=a} = 0, (w)_{y=0} = 0, (w)_{y=b} = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} = 0 \quad (10)$$

$$w(0,0) = 0, w(a,0) = 0, w(0,b) = 0, w(a,b) = 0 \quad (11)$$

根据中心对称^[4], 当载荷对 $x = a/2$ 和 $y = b/2$ 亦为对称时, 则两对边的边界条件是相同的, 且 $A_m = B_m, C_m = D_m, E_n = F_n, G_n = H_n$, 对以上三种载荷(当 p 作用在 $a/2$ 和 $b/2$)均适用。

将 $w_1 + w_2$ 代入以上各式, 首先由(11)式可得 $a_{00} = a_{01} = a_{10} = a_{11} = 0$ 。

由(9)式和(10)式的第一式, 并将其中的非正弦函数均展成正弦级数(参见文献[7])可得

$$\begin{aligned} & \sum_m \left[A_m \frac{2\beta}{b} \frac{2\alpha_1 \alpha_2 (\cos m\pi - \cos n\pi)}{(\beta^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2} \left[\frac{\cos \alpha_1 b}{sh \alpha_2 b} - \cos n\pi \alpha_2 b \right] \right. \\ & + C_m \frac{2\beta}{b} \frac{2\alpha_3 \alpha_4 (\cos m\pi - \cos n\pi)}{(\beta^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2 + 4\alpha_3^2 \alpha_4^2} \left[\frac{\cos \alpha_3 b}{sh \alpha_4 b} - \cos n\pi \alpha_4 b \right] \\ & \left. + E_n + G_n - \frac{q_0 b^4}{D_{22}} \frac{1 - \cos n\pi}{48} \left[\frac{1}{12(n\pi)^3} - \frac{1}{(n\pi)^5} \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_m \left\{ A_m \frac{2\alpha\beta}{b} \frac{\cos m\pi + \cos n\pi}{(\beta^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 + 4\alpha_1^2 \alpha_2^2} \left[2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\sin \alpha_1 b}{sh \alpha_2 b} + (\beta^2 - \alpha_1^2 + \right. \right. \\ & \alpha_2^2) \cos n\pi \left. \right] + C_m \frac{2\alpha\beta}{b} \frac{\cos m\pi + \cos n\pi}{(\beta^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2 + 4\alpha_3^2 \alpha_4^2} \left[2\alpha_3 \alpha_4 \frac{\sin \alpha_3 b}{sh \alpha_4 b} \right. \\ & \left. + (\beta^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2) \cos n\pi \right] \left. \right\} - E_n \beta_2 (\cos n\pi \frac{\cos \beta_1 a}{sh \beta_2 a} + \alpha_2 \beta_2 a) + \\ & \sum_k E_k (\gamma_2 \cos k\pi \frac{\sin \gamma_1 a}{sh \gamma_2 a} + \gamma_1) \frac{4n}{n^2 - k^2} - G_n \beta_4 (\cos n\pi \frac{\cos \beta_3 a}{sh \beta_4 a} + \alpha_4 \beta_4 a) \\ & \sum_k G_k (\gamma_4 \cos k\pi \frac{\sin \gamma_3 a}{sh \gamma_4 a} + \gamma_3) \frac{4n}{n^2 - k^2} + \frac{q_0' ab^2}{D_{12} + 2D_{66}} \frac{1 - \cos n\pi}{2(n\pi)^3} + \sum_m A_{mn} \alpha = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式中的 k 和 γ 分别与 n 和 β 的意义相同。

设板为复合材料对称叠层 $45^\circ/-45^\circ/-45^\circ/45^\circ$, 容易求得 $D_{11} = D_{22}, D_{16} = D_{26}$, 且 $D_{12} + 2D_{66} > D_{11}$ 。

$$\alpha_1, \alpha_3 = \frac{\alpha}{4} \left[-\lambda \pm \sqrt{2 \sqrt{(\mu+2)^2 - 4\lambda^2} - 2(\mu+2) + \lambda^2} \right]$$

$$\alpha_2, \alpha_4 = \frac{\alpha}{4} \left[\sqrt{4\mu - 8 - \lambda^2} \pm \sqrt{2 \sqrt{(\mu+2)^2 - 4\lambda^2} + 2(\mu+2) - \lambda^2} \right]$$

式中 $\lambda = 4D_{16}/D_{11}, \mu = 2(D_{12} + 2D_{66})/D_{11}$, 同样对 $\beta_{1,2,3,4}$ 或 $\gamma_{1,2,3,4}$ 只需将 α 改为 β 或 γ 即得。

当 $a = b$, 还可以得出挠度对直线 $x = y$ 和 $x + y = a$ 为对称, 因而(9)式的第三式分别等于第一式。且 $E_n = A_n, G_n = C_n$ 。因此由(12)式和(13)式即可解出 A_m 和 C_m 。为满足这一要求, (12)式左边最后一项不能根据(3)式来求解, 而取

$$w_2 = \frac{q_0}{48} \left[\frac{(a-x)^2 x^2}{D_{11}} + \frac{(b-y)^2 y^2}{D_{22}} \right] \quad (14)$$

取 $\nu_1 = 0.25, G_{12}/E_2 = 0.5$, 玻璃纤维时 $E_1/E_2 = 3, D_{11} = 0.1374E_2h^3, \lambda = 0.929, \mu = 2.955$; 石

碳纤维时 $E_1/E_2=40$, $D_{11}=0.9076E_2h^3$, $\lambda=2.6898$, $\mu=5.54077$ 。

当 m 和 n 各取 6 项, 求得沿对角线 $x=y$ 和 $x+y=a$ 各点的挠度见表 1 和表 2。

表 1 玻璃纤维板各点的挠度

Tab. 1 Deflection of various point for glass fiber plates

w	x/a	0.2	0.3	0.4	0.5
$10^{-6} q_0 a^4 / D_{11}$	$y=x$	303	693	1040	1178
eq. (14)	$y=a-x$	212	600	1007	1178
$10^{-6} p a^2 / D_{11}$	$y=x$	740	2183	4036	5026
eq. (7)	$y=a-x$	350	1601	3710	5026

表 2 石墨纤维板各点的挠度

Tab. 2 Deflection of various point for graphite fiber plates

w	x/a	0.2	0.3	0.4	0.5
$10^{-6} q_0 a^4 / D_{11}$	$y=x$	337	689	968	1074
eq. (14)	$y=a-x$	132	487	900	1074
$10^{-6} p a^2 / D_{11}$	$y=x$	945	2370	4018	4829
eq. (7)	$y=a-x$	105	1055	3267	4829

作者同时还计算了 $x/a=0.6, 0.7, 0.8$ 各点的挠度值, 结果表明符合对称性要求。另外还计算了 $-45^\circ/45^\circ/45^\circ/-45^\circ$ 方板, 仅 D_{16} 和 D_{26} 变成相同的负值, 而 $y=x$ 和 $y=a-x$ 各点的挠度分别变成 $y=a-x$ 和 $y=x$ 的值。这些均与文献 [8] 的图形是一致的。

采用其他公式算得板中点的挠度见表 3。比较表中的结果可知: 同为均布载荷, (3) 式和 (4) 式是相近的。由于 (6) 式在 (13) 式中为求和项, 故自然差一些。由 (7) 式可以看出, 集中力时收敛性更差一些。

表 3 板中点的挠度

Tab. 3 Deflection at the center of plates

w_{\max}	$10^{-6} q_0' a^4 / D_{11} \text{eq} (4)$	$10^{-6} q_0'' a^4 / D_{11} \text{eq} (6)$	$10^{-6} q_0''' a^4 / D_{11} \text{eq} (8)$
glass fibre	1177	1183	2336
graphite fibre	1075	1079	2152

补充说明: 如欲求满足各角点两边的斜度或弯距, 则必须增加文献 [4] 所补充的八个代数多项式解以及相应的角点条件。这是因为这种解法在求解时将非正弦函数展成正弦级数, 并未满足角点的要求。由于这个不满足的角点相应产生的弯距 (乘以无限小的距离) 是趋于零的, 故对表中的值不会有明显的改变。为此, 作者根据以上所述也作了计算, 其结果确实是趋于相同的。

参考文献:

- [1] Padovan J. Static solution of monoclinic circular plates [J]. AIAA J, 1971, 9 (12): 2473-2475.
- [2] Padovan J. An exact solution for bending fields in anisotropic balanced ply laminated plate strips [J]. J. A. M. 1974, 41 (1): 294-296.
- [3] 梁礼平. 各向异性板弯曲分析的一种级数⁴边界积分法 [J]. 应用数学和力学, 1990, 11 (8): 697-703.
- [4] 张承宗, 杨光松. 各向异性板结构横向弯曲一般解析解 [J]. 力学学报, 1996, 28 (14): 429-440.
- [5] Jones R M. Mechanics of Composite Materials [M]. New York, McGraw-Hill 1975.
- [6] 卡尔曼诺克 A. C. 薄板结构力学 [M]. 北京: 建筑工程出版社.
- [7] 黄炎. 弹性薄板理论 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1992.
- [8] 程耿东. 关于复合材料方板对称性的讨论 [J]. 力学与实践, 1985, 7 (6): 35-38.