

文章编号: 1001-2486 (2002) 01-0044-05

Lanczos 技术加速第二类 Fredholm 方程的快速求解*

童创明¹, 袁乃昌², 洪伟¹

(1. 东南大学毫米波国家重点实验室, 江苏 南京 210096;

2. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 介绍了 Lanczos 技术加速第二类 Fredholm 方程求解的基本原理, 结合矩量法预测了任意形状均匀介质柱体的单站雷达散射截面 RCS。首先建立介质柱中的电场积分方程, 然后采用矩量法将积分方程化为矩阵方程, 再利用 Lanczos 技术求解矩阵方程得到介质柱内电场。计算结果表明, Lanczos 技术可加快 MOM 矩阵方程的计算速度。

关键词: 矩量法; Lanczos 技术; 雷达散射截面; 介质柱

中图分类号: TN011

文献标识码: A

Fast Calculation of the Fredholm Equation of the Second Kind Based on Lanczos Technique

TONG Chuang-ming¹, YUAN Nai-chang², HONG Wei¹

(1. State Key Lab. of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The basic principle of fast calculation of the Fredholm equation of the second kind based on Lanczos technique is introduced. The method of moments in conjunction with Lanczos technique is applied to predict the monostatic radar cross section (RCS) of an arbitrarily shaped two-dimensional dielectric cylinder. The electric field integral equation (EFIE) in the dielectric cylinder is established firstly, and then EFIE using the method of moments is changed into the matrix equation, and the electric field in the dielectric cylinder is obtained by solving the matrix equation using Lanczos technique. It is observed that the Lanczos technique can result in considerable CPU time saving.

Key words: MOM; Lanczos technique; RCS; dielectric cylinder

根据电磁场理论, 介质散射柱体在平面波激励下, 可以建立散射体内的电场积分方程 (EFIE), 该方程属于第二类 Fredholm 积分方程。

根据积分方程理论, 第二类 Fredholm 积分方程可采用逐次逼近法 (Method of Successive Approximation, MSA)^[1]、矩量法 (Method of Moment, MOM)^[2] 等近似解析方法和数值方法求解。MSA 是将积分方程的解表示成 Liouville-Neumann 级数的形式, 选取方程的激励项作为解的初值, 采用迭代法逐次逼近求解, 近似解所需级数的项数可根据预先设定的精度截断, 但是在某些情况下, 级数收敛很慢或根本不收敛。MOM 是一种将积分方程转化为线性代数方程组或矩阵方程求解的重要数值方法, 这种方法与其它数值方法相比的优点在于其不存在解的收敛性问题。

矩量法求解电磁散射问题的积分方程时, 首先将介质柱体积分区域离散; 然后将介质柱内总电场按一定形式的基函数叠加展开, 采用一定形式的权函数将积分方程化为代数方程组或矩阵方程, 解此矩阵方程可得到介质柱内总电场并将其等效为极化电流; 最后由此极化电流计算出散射体的雷达散射截面 (RCS)。但是对于电大尺寸或高介电常数的介质散射体, 矩阵方程的系数矩阵是稠密的大型矩

* 收稿日期: 2001-08-29

基金项目: 国家杰出青年基金资助项目 (69625102)

作者简介: 童创明 (1964—), 男, 副教授, 博士后。

阵, 这种矩阵的求逆不仅要占用大的计算机内存而且需要花费长的 CPU 时间。

Lanczos 技术能有效地克服 MOSA 和 MOM 两种方法的缺点, 这种技术不会占用过大的计算机内存, 不需要花费过长的 CPU 时间, 也不会遇到收敛性问题, 而且能加速矩阵方程求解。Lanczos 技术是由 Lanczos 在 1950 年研究提出的用类似 Liouville-Neumann 级数表示 Fredholm 矩阵方程的解的迭代求解方法, 该技术已成功地应用到电磁场的全波分析与计算中^[5-7]。

1 理论

1.1 介质柱极化电流的矩量法解

考虑任意形状均匀分布的二维介质柱。介质柱截面置于 xoy 平面, 纵轴为 z 。在 TM 入射情形下, 入射波为 E_z^i , 由文献[2~4]知, 介质柱内电场积分方程和等效极化电流分别为

$$E_z^i(\rho) = E_z(\rho) + \frac{jk^2[\epsilon - 1]}{4} \int_S E_z(\rho') H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) ds' \quad (1a)$$

$$J_z(\rho) = j\omega\epsilon_0[\epsilon - 1] \cdot E_z(\rho) \quad (1b)$$

式中, k 为自由空间波数, ρ 和 ρ' 分别为介质柱截面 S 上的场点和源点坐标, $H_0^{(2)}(x)$ 为第二类零阶 Hankel 函数, ϵ 为介质柱的相对介电常数, $E_z(\rho')$ 与 $J_z(\rho')$ 为源点 ρ' 处的总场和极化电流。将介质柱截面内切套在一个矩形框内, 并将该矩形区域沿 x 和 y 方向分别分为 N_x 和 N_y 等份, 即整个矩形区域离散为 $N = N_x \times N_y$ 个子矩形区域, 在离散的矩形区域上采用脉冲函数作总场 $E_z(\rho')$ 的展开基并进行点配, 则式 (1) 离散为矩阵方程

$$I - \gamma ZI = V \quad (2a)$$

$$J = \frac{4}{K\eta} V \quad (2b)$$

式中, η 为自由空间的波阻抗, Z 是元素为复数的 $N \times N$ 阶稠密系数矩阵, V 是 N 维激励电场向量, I 是待求的 N 维电场向量, γ 是与相对介电常数和频率有关的常量。式 (2) 中矩阵 Z 和向量 V 的各元素, 以及常量 γ 表达如下:

$$Z_{mn} = - \int_{\Delta S_n} \Delta S H_0^{(2)}(k|\rho' - \rho|) ds' \quad (3a)$$

$$V_m = \exp[jk(x_m \cos\theta + y_m \sin\theta)] \quad (3b)$$

$$\gamma = \frac{jk^2(\epsilon - 1)}{4} \quad (3c)$$

式中, m, n 分别为第 m, n 个子矩形区域的编号 ($m, n = 1, 2, \dots, N$), θ 为入射波方向, $\Delta S_n = \Delta S$ 是第 n 个单元的面积, ρ_m 或 (x_m, y_m) 是第 m 个单元中点矢径或坐标。

求解式 (2) 得介质柱内极化电流, 由此求出柱体的单站散射 RCS:

$$\sigma = \frac{k\eta^2}{4} \Delta S^2 |V^T J|^2 \quad (4)$$

式中, “ T ” 表示向量转置。

电场积分方程式 (1a) 是第二类 Fredholm 积分方程, 经 MOM 转化为第二类 Fredholm 矩阵方程 (2a)。对于电大尺寸散射体, Z 是大型稠密系数矩阵, 若按一般矩阵方程迭代求解方法, 矩阵方程 (2a) 的求解不仅要占用很大的计算机内存而且需要花费很长的 CPU 时间。下面介绍的 Lanczos 技术能有效地加速矩阵方程 (2a) 迭代求解过程并不会占用过多的计算机内存。

1.2 Lanczos 算法

考虑以下第二类 Fredholm 实对称矩阵方程

$$Y - \lambda Y = F \quad (5)$$

式中, A 是自伴的 $N \times N$ 阶稠密系数矩阵, F 是 N 维向量, Y 是待求的 N 维向量, λ 是常量。式 (5) 的 Lanczos 迭代求解有多种不同的方法。本文只介绍一种, 即最小迭代法 (Lanczos-Method of Minimized Iterations, 简称 Lanczos-MMI), 该算法描述如下:

第一步, 定义一组 N 维正交向量 $V_i | (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ 。

1) 选取任意非零初始向量 V_0 。例如, 可选

$$V_0 = F \quad (6a)$$

2) 定义向量 $V_i | (i = 1, 2, \dots, N)$ 为

$$V_i = AV_{i-1} - \alpha_{i-1} V_{i-1} - \beta_{i-2} V_{i-2} \quad (6b)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{(AV_i, V_i)}{(V_i, V_i)} & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases} \quad (6c)$$

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{(V_{i+1}, V_{i+1})}{(V_i, V_i)} & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases} \quad (6d)$$

式中, $(X, Y) = X^T Y$ 表示内积运算。因而向量组 $V_i | (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ 是互相正交的, 即 $(V_i, V_j) = \delta_{ij}$, 它们由初始向量 V_0 开始依次递归求出。

第二步, 定义多项式组 $y_i(x) | (i = 0, 1, 2, \dots, M)$ 。

$$y_0(x) = 1 \quad (7a)$$

$$y_i(x) = x - \bar{\alpha}_{i-1} y_{i-1} - \bar{\beta}_{i-2} y_{i-2} \quad (7b)$$

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_{M-1-i} & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases} \quad (7c)$$

$$\bar{\beta}_i = \begin{cases} \beta_{M-2-i} & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases} \quad (7d)$$

因而多项式组 $y_i(x) | (i = 1, 2, \dots, M)$ 可以由零次多项式 $y_0(x)$ 开始依次递归求出。

第三步, 叠加求近似解。设 Lanczos 迭代步数为 M , 则方程 (5) 在迭代到第 M 步时的近似解只需以有限项向量 $V_i | (i = 0, 1, 2, \dots, M)$ 为基、以有限项多项式 $y_i(x) | (i = 0, 1, 2, \dots, M)$ ($x = 1/\lambda$) 为系数叠加求和获得, 即

$$Y_M = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} y_i(1/\lambda) V_{M-1-i}}{\lambda_M(1/\lambda)} \quad (8)$$

第四步, 收敛性判断。设进行 M 步和 $M+1$ 步 Lanczos 迭代过程后, 得到的近似解分别为 Y_M 和 Y_{M+1} , 若预先设定允许误差为 δ , 当满足

$$\frac{\|Y_{M+1} - Y_M\|}{\|Y_M\|} < \delta \quad (9)$$

时, 可以认为第 M 步 Lanczos 迭代得到的近似解 (8) 已收敛到精确解, 该精确解也就是当 $M = N$ 时 Lanczos 迭代得到的解, 因为一个 $N \times N$ 阶矩阵方程的解一般可用 N 个向量构造出来。

由上述 Lanczos 迭代过程可知, 在得到渐近解析表达式的过程中, 与一般迭代方法不同的是, 不需要记录任何一个规模较大的中间矩阵, 而仅仅需要记录两个迭代步长的向量, 因而, 这种算法对计算机的内存资源要求不高, 同时, 从式 (6) 的 Lanczos 迭代过程来看, 其计算量主要体现在矩阵与向量的乘积、向量与向量的内积运算等方面。Lanczos 迭代步数 M 与矩阵 A 的阶数 N 相比, 一般满足 $M \ll N$, 所以能有效地加速矩阵方程 (5) 的求解, 因而 $\tau = M/N$ 可代表 Lanczos 方法的改善效率。

由式 (6) ~ (8) 知, 递归向量 V_i 只取决于矩阵 A 和初始向量 V_0 , 参数 λ 的变化只影响递归多项式 $y_i(1/\lambda)$, 而不会影响递归向量 V_i 。因此, 从理论上讲, 对于第二类 Fredholm 实对称矩阵方程 (5), 当参数 λ 变化时, 只需计算一次递归向量 V_i , 就能获得相应的新解。更进一步地说, 当介质柱的结构一定, 相对介电常数 ε 改变时, 只需计算某一个 ε 时的递归向量 V_i , 就能获得随相对介电常数 ε_r 改变时介质柱内的极化电流新解。

2 数值结果

为了验证本文算法的有效性,下面给出几个计算实例:带孔长方形柱和半圆形柱,介质柱的相对介电常数取 $\epsilon_r = 4$ 。MOM-Lanczos 计算结果与 MOM 数值结果进行了比较,入射频率 $f_0 = 30\text{GHz}$ 的电磁波激励下的单站 RCS 方向图结果如图 1、2 所示,入射角 $\theta = 0^\circ$ 的电磁波激励下的宽带单站 RCS 频域响应如图 3、4 所示。

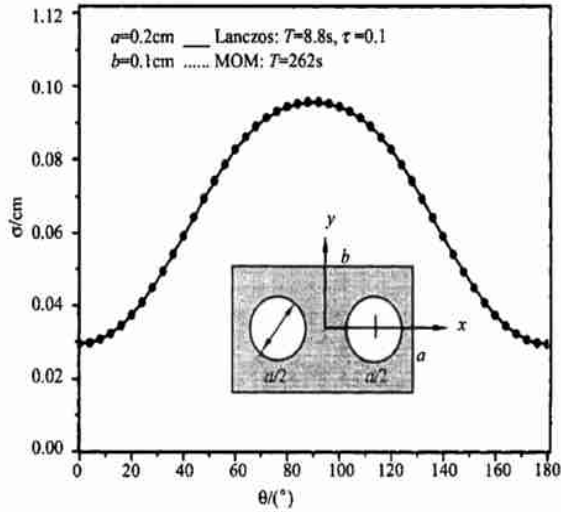


图 1 带孔长方形介质柱的单站 RCS 方向图

Fig. 1 RCS angular responses of the rectangle dielectric cylinder with circle holes

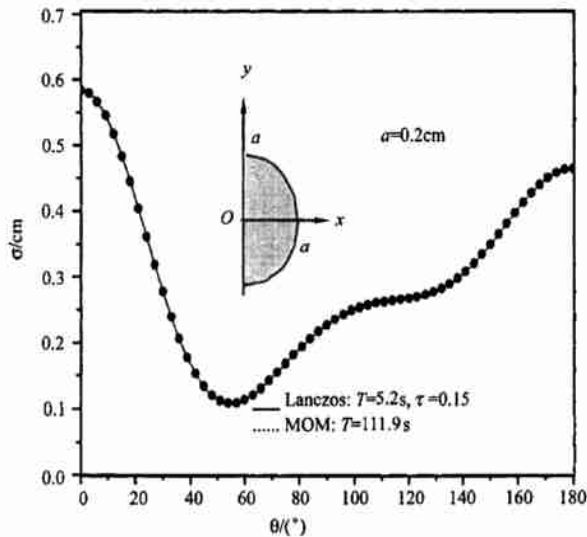


图 2 半圆形介质柱的单站 RCS 方向图

Fig. 2 RCS angular responses of the semicircular dielectric cylinder

3 结论

本文采用 Lanczos-MOM 实现任意形状二维介质柱单站 RCS 的快速计算。计算结果表明 Lanczos 方法的收敛性,收敛改善效率 τ 在 0.1 到 0.28 之间。Lanczos 方法能有效解决 MOM 占用计算机内存过大的问题,它不需要花费过长的 CPU 时间,也不会遇到收敛性问题,而且能加速矩阵方程求解。

本文方法亦可应用到涂敷目标的电磁散射计算中去。

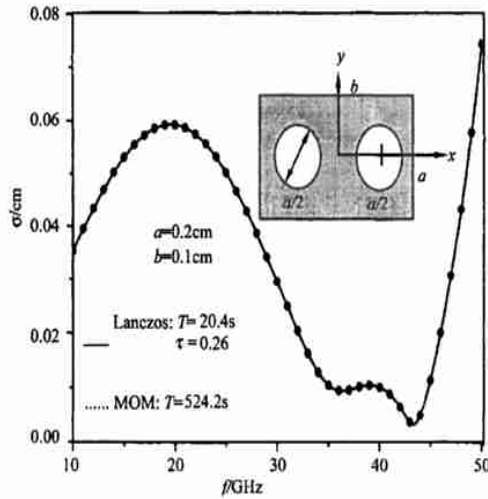


图3 带孔长方形介质柱的RCS频率响应

Fig. 3 RCS frequency responses of the rectangle dielectric cylinder with circle holes

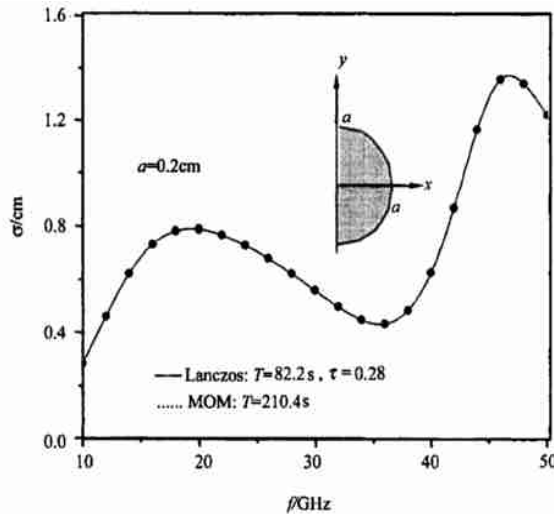


图4 半圆形介质柱的RCS频率响应

Fig. 4 RCS frequency responses of the semicircular dielectric cylinder

参考文献:

- [1] Riechers R G. The Application of Lanczos S- Expansion Method to the Solution of TM Scattering from a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross Section [J]. IEEE Trans. on AP, 1990, 38 (8): 1204- 1212
- [2] Harrington R F. 计算电磁场的矩量法 [M]. 王尔杰 等译. 北京: 国防工业出版社, 1981.
- [3] 童创明, 周后型, 洪伟. 渐近波形估计技术应用于介质柱宽带 RCS 频率响应的快速获取 [J]. 东南大学学报, 2001, 31(1): 11- 14.
- [4] 童创明, 洪伟. 渐近波形估计技术用于介质柱宽角度 RCS 的计算 [J]. 电波科学学报, 2001, 16 (1): 72- 75.
- [5] Robert F R, Peter M B. A Modified Lanczos Algorithm for the Computation of Transient Electromagnetic Wave fields [J]. IEEE Trans. on MTT, 1997, 45 (12): 2139- 2149
- [6] Mohammad R Z. Efficient Time- Domain and Frequency- Domain Finite- Element Solution of Maxwell's Equations Using Spectral Lanczos Decomposition Method [J]. IEEE Trans. on MTT, 1998, 46 (8): 1141- 1148
- [7] Roland W F. An Implementation of the Look- ahead Lanczos Algorithm for Non- Hermitian Matrices [J]. SIAM J. SCI. COMPUT., 1993, 14 (1): 137- 158.