文章编号: 1001-2486 (2002) 01-0054-05

信号的直接采样理论*

李琳, 张尔扬, 路军
(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘　要: 经典的采样定理建立了带限信号与其均匀采样值之间的联系。本文对采样定律作了三点补充: 1) 给出在定理条件不满足时, 由均匀采样值恢复的信号与原信号的误差表达式; 2) 用简洁的方法分析了带通信号的均匀采样问题, 得到了采样率应满足的条件; 3) 研究了一种特殊的非均匀采样情况, 给出了采样率的可取范围以及由非均匀采样重构原信号的公式。这些都是对经典采样定理的丰富和深化。

关键词: 频谱混叠; 均匀采样; 非均匀采样; 完全重构
中图分类号: TN911　　　文献标识码: A

Direct Sampling Theory of Signal

LI Lin, ZHANG Er-yang, LU Jun
(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Classical sampling theorem establishes the relationship between the band_limited signal and its uniform samples. This paper reinforces it in three aspects. First, the error formula of the reconstructed signal and the original signal is presented when the theorem conditions are not satisfied. Second, this paper analyzes the uniform sampling of the band_pass signal using concise method, and then gets the conditions which the sampling frequency should satisfy. Last, the nonuniform sampling of the band_pass signal is studied. The consent range for sampling frequency and the reconstructed formula from its nonuniform samples are presented. All this enriches and deepens the classical sampling theorem.

Key words: spectrum aliasing; uniform sampling; nonuniform sampling; perfect reconstruction

关于信号的直接采样已有一些成熟的结论[1~3]。最近王桥、吴乐南借用一维微分算子自伴扩张理论以及谱论的 tiling 分析等技术得到了一些新的结论, 进一步丰富了信号的直接采样理论, 这项研究得到了国家自然科学基金和中国博士后科学基金的资助。本文通过研究带通信号的均匀采样和一种特殊的非均匀采样情况 (这里提到的非均匀采样可等效为将多路并行采样中的几路采样值按时间先后排序所得的采样), 得到了更有一般性的结论, 并且分析方法也比较简洁、直观。

1　由均匀采样恢复的信号与原信号的误差分析

采样定理: 连续信号 $x_a(t)$ 为有限带宽的, 即: $X_a(\mathrm{j}\Omega)\equiv 0,\ |\Omega|\geq\Omega_a$。对 $x_a(t)$ 以 T 为采样周期进行等间隔采样, 若 $1/T\geq 2f_a$ (或 $\Omega_s\geq 2\Omega_a$), 那么可由 $x_a(nT)$ 完全重构 $x_a(t)$, 且重构公式为

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin[\Omega_s(t-nT)/2]}{\Omega_s(t-nT)/2}\tag{1}$$

若定理条件不满足, 则 (1) 式不成立。将 (1) 式右边记为 $x_r(t)$, 下面估计 $|x_a(t)-x_r(t)|$。

为方便表示, 以下都用 $\sum_n$ 代替 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$。

* 收稿日期: 2001-09-01
作者简介: 李琳 (1976—), 女, 博士生。

显然

$$x_r(t)=\left\{\sum_n x_a(nT)\,\delta(t-nT)\right\}*\left\{\frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2}\right\}\stackrel{\Delta}{=\!=}x_s(t)*h(t)$$

因此

$$X_r(\mathrm{j}\,\Omega)=\{(1/T)\sum_k X_a(\mathrm{j}\,\Omega-\mathrm{j}2\pi k/T)\}H(\mathrm{j}\,\Omega) \tag{2}$$

其中 $H(\mathrm{j}\,\Omega)$ 是通带增益为 T, 截止频率为 $\Omega_h=\Omega_s/2=\pi/T$ 的理想低通滤波器。

因

$$\begin{aligned}
x_r(t)&=1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}X_r(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega\\
&=1/(2\pi T)\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k X_a(\mathrm{j}\,\Omega-\mathrm{j}2\pi k/T)H(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega\\
&=1/(2\pi)\int_{-\pi/T}^{+\pi/T}\sum_k X_a(\mathrm{j}\,\Omega-\mathrm{j}2\pi k/T)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega\\
&=1/(2\pi)\sum_k\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega+2\pi k/T)t}\mathrm{d}\,\Omega
\end{aligned} \tag{3}$$

而

$$\begin{aligned}
x_a(t)&=1/(2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega\\
&=1/(2\pi)\sum_k\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega
\end{aligned} \tag{4}$$

因此

$$\begin{aligned}
|x_a(t)-x_r(t)|&=\left|1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}[X_a(\mathrm{j}\,\Omega)-X_r(\mathrm{j}\,\Omega)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}\mathrm{d}\,\Omega\right|\\
&=\left|1/(2\pi)\sum_k\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kt/T})\mathrm{d}\,\Omega\right|\\
&=\left|1/(2\pi)\sum_{k\neq 0}\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}(1-\mathrm{e}^{2\pi kt/T})\mathrm{d}\,\Omega\right|\\
&\le 1/(2\pi)\sum_{k\neq 0}\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}\left|X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\Omega t}(1-\mathrm{e}^{2\pi kt/T})\right|\mathrm{d}\,\Omega\\
&\le 1/\pi\sum_{k\neq 0}\int_{-\pi/T-2\pi k/T}^{+\pi/T-2\pi k/T}\left|X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\right|\mathrm{d}\,\Omega\\
&\le 2/\pi\int_{\pi/T}^{\infty}\left|X_a(\mathrm{j}\,\Omega)\right|\mathrm{d}\,\Omega
\end{aligned} \tag{5}$$

显然, 在定理条件满足时有: $|x_a(t)-x_r(t)|=0$

2 带通信号的直接采样

2.1 均匀采样情况

带通实信号 $x_a(t)$ 的幅度谱如图 1 所示, 其频谱限制在 (f_l, f_u) 之间, 带宽 $B=f_u-f_l$。考虑到其采样信号 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(\mathrm{j}\,\Omega)$ 以 $\Omega_s=2\pi/T$ 为周期, 分析一个周期即可。取如图 2 所示的一个周期, 该周期内的频谱为 $X_a(\mathrm{j}\,\Omega)$ 的正频谱和 $X_a(\mathrm{j}\,\Omega)$ 的“-”频谱的第 k 次正向搬移(要求 $k\ge 0$), 为保证不混叠, 要求

$$\begin{cases} kf_s-f_l & \le f_l\\ kf_s-f_u & \ge -f_s+f_u\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} kf_s & \leq 2f_l \\ (k+1)f_s & \geq 2f_u \end{cases}$$

整理得
$$2f_u/(k+1) \leq f_s \leq 2f_l/k \tag{6}$$

(6)式要有解，要求 $2f_l/k \geq 2f_u/(k+1)$。即：$k \leq f_l/B$。因此

$$f_s \in \bigcup_{k=0}^{K}[2f_u/(k+1), 2f_l/k] \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_{k=0}^{K} \Delta_k \tag{7}$$

其中 $K = \mathrm{Int}(f_l/B)$，符号 $\mathrm{Int}(\cdot)$ 表示向下取整。这里约定：$[2f_u, 2f_l/0] = [2f_u, \infty]$。

完全重构原信号，只需用一个带通滤波器，其频率响应为

$$H(f) = \begin{cases} T & f_l \leq |f| \leq f_u \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

脉冲响应为

$$h(t) = (\sin(2\pi f_u t) - \sin(2\pi f_l t))/(\pi f_s t)$$

相应的重构公式为

$$x_a(t) = \sum_n x_a(nT)h(t - nT) \tag{8}$$

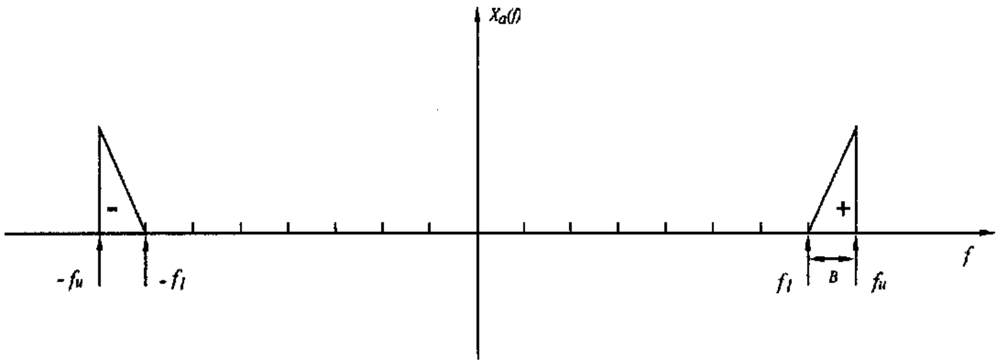

图 1　$x_a(t)$ 的幅度谱

Fig 1　Magnitude spectrum of the $x_a(t)$

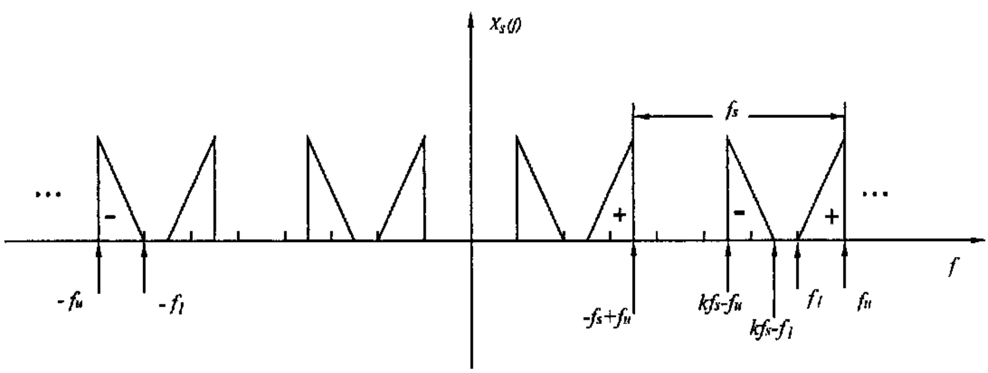

图 2　$x_s(t)$ 的幅度谱

Fig. 2　Magnitude spectrum of the $x_s(t)$

将 K 值代入，得到最低的采样率为

$$[f_s]_{\min} = 2f_u/(K+1) \tag{9}$$

显然，$[f_s]_{\min} \leq 2f_u$。说明三点：(1)低通信号(满足 $f_l < B$)为带通信号的一个特例，由(9)式有：$[f_s]_{\min} = 2f_u$；(2)对于低通信号，只要以 $f_s \geq [f_s]_{\min}$ 的采样率进行采样，就不会出现混叠，对于带通信号，由于采样率的取值区间是分段的，不连续，因此 $f_s > [f_s]_{\min}$ 并不能保证以 f_s 进行采样就不会出现混叠；(3)各 Δ_k 两两不相交，且 $\Delta_0 = [2f_u, \infty]$，因而以 $f_s \geq 2f_u$ 进行采样，是不会出现频谱混叠的。这与经典

的采样定理是一致的。

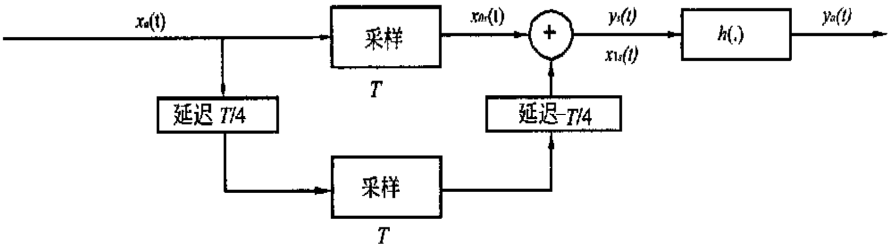

图 3　由两路采样值重构原信号

Fig. 3　Reconstruct original signal from the two sequences of its samples

2.2　非均匀采样情况

这里讨论一种特殊的非均匀采样情况, 可等效为将 M 路并行采样中的几路采样按时间先后排序所得的采样序列。以 $M=4$, 取前两路输出为例来讨论。图 3 为原理框图。显然, 若将这两路采样按时间先后排成一列, 得到的序列就是一个“有规律”的非均匀采样序列, 文献 [2] 称之为“半均匀”采样。

显然

$$X_{0s}(\mathrm{j}\Omega)=(1/T)\sum_k X_a(\mathrm{j}(\Omega+2\pi k/T)) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} X_{1s}(\mathrm{j}\Omega) &= (1/T)\sum_k X_a(\mathrm{j}(\Omega+2\pi k/T))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\Omega+2\pi k/T)T/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T/4} \\ &= (1/T)\sum_k X_a(\mathrm{j}(\Omega+2\pi k/T))\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2} \end{aligned} \tag{11}$$

如果 T 满足 2.1 中对采样周期的要求, 则每一路采样都不会出现频谱混叠。下面讨论采样率能否进一步降低。也就是说, 尽管每一路都有混叠, 但如果两路相加能将所关心的频带内的混叠频谱抵消掉, 那么仍能完全重构原信号。

注意到: 当 $k=4i+2$ 时, $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}=-1$。如果位于 (f_l, f_u) 内的混叠频谱恰为原信号“–”频谱的第 $4i+2$ 次正向搬移 (要求 $i\geq 0$), 即

$$\begin{cases}(4i+1)f_s-f_l & \leq f_l \\ (4i+3)f_s-f_u & \geq f_u\end{cases} \tag{12}$$

就可利用因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k/2}=-1$ 把由于对 $x_a(t)$ 欠采样在 (f_l,f_u) 内产生的混叠频谱抵消掉。求解 (12) 式得到

$$2f_u/(4i+3)\leq f_s\leq 2f_l/(4i+1) \tag{13}$$

上式要有解, 要求: $2f_u/(4i+3)\leq 2f_l/(4i+1)$。

即: $i\leq(2f_l/B-1)/4$。因此

$$f_s\in\bigcup_{i=0}^{I}[2f_u/(4i+3), 2f_l/(4i+1)] \tag{14}$$

其中 $I=\mathrm{Int}((2f_l/B-1)/4)$。

既然在 (f_l,f_u) 内频谱无混叠, 用一个带通滤波器就可完全重构原信号。即

$$(X_{0s}(\mathrm{j}\Omega)+X_{1s}(\mathrm{j}\Omega))H(\mathrm{j}\Omega)=X_a(\mathrm{j}\Omega) \tag{15}$$

其中 $H(f)=\begin{cases}T/2 & f_l\leq|f|\leq f_u \\ 0 & \text{else}\end{cases}$

重构公式为

$$\begin{aligned} x_a(t) &= x_{0s}(t)*h(t)+x_{1s}(t)*h(t) \\ &= \{\sum_n x_0(nT)\delta(t-nT)\}*h(t)+\{(\sum_n x_1(nT)\delta(t-nT))*\delta(t+T/4)\}*h(t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n}^{n} x_0(nT)h(t-nT) + \sum_{n} x_1(nT)h(t-nT+T/4)$$
$$= \sum_{n} x_a(nT)h(t-nT) + \sum_{n} x_a(nT-T/4)h(t-nT+T/4) \quad (16)$$

其中

$$h(t) = (\sin(2\pi f_u t) - \sin(2\pi f_l t))/(2\pi f_s t)$$

若信号使得 $I \geq 0$, 即: $(2f_l/B-1)/4 \geq 0$, 即 $f_l \geq B/2$, 那么 $[f_s]_{\min}$ 至少可以取到 $2f_u/3$, 这正是文献[4]给出的结论。显然, 这对应于 $I=0$ 的情况, 若信号能使 I 值取得更大, 则 $[f_s]_{\min}$ 可进一步降低。

3 举例说明

对信号 $x_a(t) = (\sin(28\pi t) - \sin(22\pi t))/(\pi t)$, 其频谱为 $X_a(f) = \begin{cases} 1 & 11 < |f| < 14 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$, 进行非均匀采样。此时 $I=1$, 则采样率的取值区间为: $[9.3333, 22] \cup [4, 4.4]$。这里采样率取到最低采样率 4。图 4 是与 (16) 式中 -15 到 15 个有限项之和对应的信号的时域波形及频谱。从图中可以看出, 它与原信号已经相当逼近, 当求和上下限趋于无穷时, 就完全重构出了原信号。

4 结束语

本文首先分析了非带限信号或欠采样情况下, 均匀采样引起的频谱混叠问题, 给出了由插值公式重构出的信号与原信号的误差估计式。然后研究了带通信号的均匀采样和非均匀采样问题。在均匀采样情况下, 完全重构原信号要求: $f_s \in \bigcup_{k=0}^{K}[2f_u/(k+1), 2f_l/k]$, 其中 $K = \mathrm{Int}(f_l/B)$; 对于非均匀采样情况, 要求 $f_s \in \bigcup_{i=0}^{I}[2f_u/(4i+3), 2f_l/(4i+1)]$, 其中 $I = \mathrm{Int}((2f_l/B-1)/4)$。本文用简洁、直观的分析方法得到了更有一般性的结论, 进一步丰富和深化了信号的采样理论。

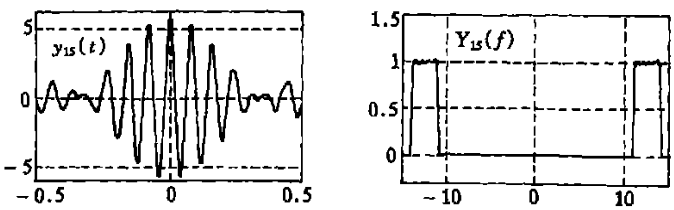

图 4 有限项之和的信号波形及频谱

Fig. 4 Waveform and spectrum of the finite sum signal

参考文献:

[1] 胡广书. 数字信号处理– 理论、算法与实现[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.

[2] 张睿, 李维英, 李建东. 带通采样技术在软件接收机中的应用[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2000, 27(3).

[3] 王桥, 吴乐南. 任意通带信号的采样定理与频带整体适应性数据表示[J]. 电子科学学刊, 2000, 22(3): 398–401.

[4] 王桥, 吴乐南. 宽带带通信号的直接采样定理[J]. 信号处理, 1999, 15(4): 294–296.