

文章编号: 1001-2486 (2002) 02-0001-05

# 固体推进剂药柱结构分析的非概率凸集合理论模型\*

张海联, 周建平

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 为了研究不确定性能参数对固体推进剂药柱结构分析的影响, 将非概率凸集合理论模型和粘弹性有限元相结合, 以增量法处理遗传积分, 利用摄动法预测其响应量区间, 发展了一种适合药柱特点的不确定性方法。将其和随机结构分析进行对比, 表明两种方法之间有一定的联系。

**关键词:** 固体推进剂药柱; 粘弹性; 非概率凸集合理论模型; 随机结构分析; 摄动法

**中图分类号:** V435      **文献标识码:** A

## Nonprobabilistic Convex Set Theoretic Models for Structural Analysis of Solid Propellant Grain

ZHANG Hai-lian, ZHOU Jian-ping

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The uncertainty of parameters may greatly affect structural analysis of solid propellant grain. Nonprobabilistic convex set theoretic models, combining viscoelastic finite element method, are developed to study the uncertainty of structures. Incremental method is applied to solving the hereditary integrals. Perturbation method is used to predict the variability of structural response. The developed method is suitable for uncertain structural analysis of solid propellant grain. By comparing with stochastic structural analysis, relations between the two methods have been found.

**Key words:** solid propellant grain; viscoelasticity; nonprobabilistic convex set theoretic models; stochastic structural analysis; perturbation method

现代复合固体推进剂是一种具有粘弹性、近似不可压缩的高填充比颗粒复合材料, 其材料参数具有不确定性。随机结构分析方法能够考虑参数的不确定性, 得到响应量的数字特征, 进一步可以确定可靠度<sup>[1,2]</sup>。但是, 随机方法对参数的信息要求比较高, 如需要知道参数的分布密度、相关结构等数据, 否则得到的结果可信度较低。比较而言, 非概率凸集合理论可以利用有限的信息, 得到响应量的区间, 弥补了随机结构分析的不足。Elishakoff 等将凸集合理论应用到结构分析上, 作出了重要的贡献<sup>[3]</sup>, 邱志平等提出了求解弹性结构静力位移区间的摄动数值方法<sup>[4]</sup>。由于推进剂材料复杂的粘弹性性质, 还没有见到用集合理论考虑其参数不确定性的报道。通常仅仅知道结构参数的分布范围, 这时可以用非概率的方法进行求解。

### 1 固体推进剂药柱的凸集合理论模型定义

固体推进剂药柱的结构参数, 如泊松比、松弛模量等具有分散性。 $X_j^l$  和  $X_j^u$  分别为不确定参数  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) 所能允许的最小值和最大值。设

$$X_j^0 = \frac{1}{2}(X_j^l + X_j^u), \Delta_j = \frac{1}{2}(X_j^u - X_j^l) \quad (1)$$

从而有

$$X_j = X_j^0 + \delta_j, |\delta_j| \leq \Delta_j \quad (2)$$

$X_j$  相当于在一个多维空间中的超立方体  $R_X$  内变化。Ben-Haim 和 Elishakoff 的凸模型理论<sup>[3]</sup>假设参数空

\* 投稿日期: 2001-09-20

基金项目: 国家杰出青年基金(19925209)和国家自然科学基金(19872076)项目

作者简介: 张海联(1974-), 男, 博士生。

间中不确定参数的变化范围可以用椭球  $ch(S)$  表示, 即

$$ch(S) = \{\boldsymbol{\delta} \mid \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\delta} \leq 1\} \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M)$ 。椭球面  $S = \{\boldsymbol{\delta} \mid \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\delta} = 1\}$  包含超立方的顶点,  $ch(S)$  是  $S$  的凸包, 利用 Lagrange 方法可以得到

$$\mathbf{W} = \text{diag}\left(\frac{1}{h_1^2}, \frac{1}{h_2^2}, \dots, \frac{1}{h_M^2}\right), h_j = \sqrt{M} \Delta_j \quad (4)$$

由于试验通常只能测得  $\Delta_j$  的大小, 该模型的好坏取决于椭球和超立方的近似程度。推进剂近似不可压, 泊松比的微小变化都会对结构分析有较大的影响, 其范围在很大程度上决定了响应量的变化区间。椭球对于超立方的近似, 相当于扩大了参数的变化范围, 泊松比也由原来的范围  $\Delta$  变化成了  $\sqrt{M} \Delta$ 。若  $M$  较大, 必然会引起响应区间的改变, 造成和实际情况的较大差别。泊松比范围的扩大还有可能使得  $v_0 + \sqrt{M} \Delta$  超出了 0.5 的限制, 增加了问题的复杂程度。

超立方体  $R_X = \{\boldsymbol{\delta} : |\delta_i| \leq \Delta_j\}$  是  $M$  维空间中的凸集, 并且是紧集  $S_X^1 = \bigcup_{j=1}^M S_X^{1j}$  的凸包, 也是紧集  $S_X^2 = \{\boldsymbol{\delta} : |\delta_i| = \Delta_j\}$  的凸包。  $S_X^1$  是  $R_X$  的外表面,  $S_X^2$  是其顶点, 其中  $S_X^{1j} = \{\boldsymbol{\delta} : |\delta_i| = \Delta_j, |\delta_i| \leq \Delta_j, i = 1, \dots, M, i \neq j\}$ 。  $R_X$  和  $S_X^1$  构成一个凸集合模型, 也和  $S_X^2$  构成凸集合模型。

经典凸分析表明: 如果  $f$  是一个仿射函数,  $S$  是一个紧集, 那么  $f$  在  $S$  上和在  $S$  的闭包  $ch(S)$  上取得相同的最小值和最大值。在药柱结构分析中,  $f$  是  $M$  维参数空间上的非线性函数, 不能直接利用定理进行分析。由于不确定参数的变化范围一般较小, 可以在  $X_j^0$  处进行一阶摄动展开

$$Y = f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^0) + \sum_{j=1}^M f_j^i \delta_j = f(\mathbf{X}^0) + \boldsymbol{\delta}^T \nabla f(\mathbf{X}^0) \quad (5)$$

其中  $\nabla f(\mathbf{X}^0)$  为  $f$  在  $X^0$  点的梯度。

此时  $f(\mathbf{X})$  为仿射函数, 在  $R_X$ 、 $S_X^1$  以及  $S_X^2$  上取得相同的极值。通过  $f$  在  $X^0$  点的梯度可以直接决定  $S_X^2$  上极值点的位置以及极值大小, 从而得到超立方体  $R_X$  上响应量的可能变化范围。由于  $S_X^2$  是有限集, 通过枚举也可以找到  $f$  的极值, 但是其计算量比较大。假设不确定参数包括泊松比、松弛模量、热膨胀系数等对药柱结构分析有重要影响的参数, Prony 级数取 3 项, 此时,  $M = 7$ , 枚举分析需要的计算量为确定性计算的 128 倍, 但是由摄动分析计算极值, 仅需 8 倍的计算量。枚举分析的计算量对  $M$  呈指数增长, 摄动分析基本上是  $M + 1$  倍的计算量,  $M$  越大, 差别越大。

## 2 摄动分析

采用适于近似不可压缩材料的粘弹性增量有限元方法作为摄动分析的基础<sup>[5]</sup>。将整体总刚度矩阵  $\mathbf{K}$  关于  $\delta_j$  作摄动展开

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^M \mathbf{K}_1^j \delta_j \quad (6)$$

和粘弹性随机有限元的随机场理论不同, 本文的不确定参数是凸集合内的元素。第  $K + 1$  时刻的位移列阵  $\Delta \mathbf{U}$  的摄动展开

$$\Delta \mathbf{U}^{(K+1)} = \Delta \mathbf{U}_0^{(K+1)} + \sum_{j=1}^M \Delta \mathbf{U}_1^{(K+1)} \delta_j \quad (7)$$

松弛应力增量为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_r^{(K+1)} = \Delta \boldsymbol{\sigma}_{r0}^{(K+1)} + \sum_{j=1}^M \Delta \boldsymbol{\sigma}_{r1}^{(K+1)} \delta_j \quad (8)$$

代入平衡方程, 整理得到递推方程

$$\mathbf{K}_0 \cdot \Delta \mathbf{U}_0^{(K+1)} = \Delta \mathbf{F}^{(K+1)} - \int_V \mathbf{B}^T \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma}_{r0}^{(K+1)} dV \quad (9)$$

$$K_0 \cdot \Delta U_1^{(K+1)} = -K_1^j \cdot \Delta U_0^{(K+1)} - \int_V B^T \cdot \Delta \sigma_{r1}^{(K+1)} dV \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (10)$$

下面给出第  $K$  时刻到第  $K+1$  时刻变量的递推关系。设第  $K$  时刻应变为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(K)} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(K)} + \sum_{j=1}^M \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(K)} \delta_j \quad (11)$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(K)} = B \Delta U_1^{(K)}, \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (12)$$

第  $K+1$  时刻变量  $S^{(K+1)}$  ( $l=1, 2, \dots, N$ ) 的摄动展开为

$$(S^l)^{K+1} = (S^l)^{K+1} + \sum_{j=1}^M (S^l)^{K+1} \delta_j \quad (13)$$

其中

$$(S^l)^{K+1} = (A_l)^K (S^l)^K + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^{(K)} \quad (14)$$

$$(S^l)^{K+1} = (A_l)^K (S^l)^K + (A_l)^K (S^l)^K + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(K)} \quad (j=1, 2, \dots, M) \quad (15)$$

从而可以得到松弛应力增量的摄动量为

$$\Delta \sigma_{r0}^{(K+1)} = D_0 \sum_{l=1}^N (C_l)^{K+1} (S^l)^{K+1} \quad (16)$$

$$\Delta \sigma_{r1}^{(K+1)} = D_0 \sum_{l=1}^N [(C_l)^{K+1} (S^l)^{K+1} + (C_l)^{K+1} (S^l)^{K+1}] + D_1^j \sum_{l=1}^N (C_l)^{K+1} (S^l)^{K+1} \quad (17)$$

其中  $A_l$  和  $C_l$  为材料参数。至此已得到完整的递推公式，将各个时刻的响应量增量叠加后得到第  $K+1$  时刻的全量  $Y$ ，再由 (5) 式得到  $f$  的梯度  $\nabla f(X^0)$ 。

超立方体  $R_X$  和  $S_X^2$  构成凸集合模型，其约束为

$$\boldsymbol{\delta} : |\delta_j| = \Delta_j \quad (18)$$

摄动分析得到梯度  $\nabla f(X^0)$ ，从而对应响应量最大值和最小值的参数位置为

$$(X_j)_{\max} = X_j^0 + \text{sign}(\nabla f_1(X^0)) \Delta_j \quad (19)$$

$$(X_j)_{\min} = X_j^0 - \text{sign}(\nabla f_1(X^0)) \Delta_j \quad (20)$$

最大值和最小值为

$$Y_{\max} = f(X^0) + \sum_{j=1}^M |\nabla f_1(X^0)| \Delta_j \quad (21)$$

$$Y_{\min} = f(X^0) - \sum_{j=1}^M |\nabla f_1(X^0)| \Delta_j \quad (22)$$

$f(X^0)$  和  $\Delta f(X^0)$  都是时间的函数。固体火箭发动机药柱常采用八面体剪应变准则作为破坏判据，将  $\gamma_8$  对  $\delta_j$  作摄动展开为

$$\gamma_8 = (\gamma_8)_0 + \sum_{j=1}^M (\gamma_8)_j \delta_j \quad (\gamma_8)_j = \left( \frac{\partial \gamma_8}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial X_j} \right) \quad (23)$$

根据 (21) (22) 式即可计算  $\gamma_8$  的响应区间。

### 3 特殊情况下概率方法的响应区间估计

假设随机场的各个随机参数之间相互独立，随机参数  $X_i$  可表示为

$$X_i = X_{i0} + X_{ir} \zeta_i \quad (24)$$

其中  $X_{i0}$  为均值， $X_{ir}$  为均方差， $\zeta_i$  是标准随机变量。假设随机场的相关尺度非常大，仅离散成一个随机单元即已经收敛，也就是说，随机变量在全场相同，不需要所谓的相关结构类型等数据，从而和凸集合模型具有可比性。

利用随机有限元方法进行结构分析后，得到响应量的均方差为<sup>[6]</sup>

$$Y_r = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{\partial Y}{\partial \zeta_i} \frac{\partial Y}{\partial \zeta_i}} \quad (25)$$

根据  $3\sigma$  法则, 随机参数几乎集中在  $[X_{i0} - \Delta_i, X_{i0} + \Delta_i]$  范围内, 其中  $\Delta_i = 3X_{ir}$ 。响应量有 99.74% 的概率处于  $[Y_{\min}, Y_{\max}]$  内, 其中

$$Y_{\min} = Y_0 - 3Y_r = Y_0 - \sqrt{\sum_{i=0}^M \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2 (\Delta_i)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2} \quad (26)$$

$$Y_{\max} = Y_0 + 3Y_r = Y_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2 (\Delta_i)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2} \quad (27)$$

若采用凸集合模型, 假设不确定参数的范围在  $[X_{i0} - \Delta_i, X_{i0} + \Delta_i]$  内, 该区间是参数空间中的超立方体。考虑椭球

$$(X - X_0)^T W (X - X_0) \leq 1 \quad (28)$$

其中  $W = \text{diag}\left(\frac{1}{\Delta_1^2}, \frac{1}{\Delta_2^2}, \dots, \frac{1}{\Delta_M^2}\right)$ , 椭球面内切于超立方体。椭球和椭球面构成凸模型, 经过分析可以发现响应量的区间范围和 (26) (27) 式相同。随机结构分析的响应量区间范围具有概率意义, 即响应量有 99.74% 的可能性落在该区间内, 也有 0.26% 的可能性超出该区间。凸集合模型认为只要参数处于特定集合, 其响应量就一定处于区间  $[Y_{\min}, Y_{\max}]$  内, 并不存在概率上的含义。

概率空间中, 随机结构分析的参数在均值点处分布密度最大, 向外逐渐减小, 其等概率密度面形成了椭球面, 其中包括 (28) 式表示的椭球面。随机参数在此椭球内的概率并不等于 99.74%, 但是若给定参数的概率大小, 椭球必然是包含随机变量的最小区域。试验测试得到的参数区间一般为超立方体, 但是在概率空间中随机参数却更倾向于以椭球区间的形式进行度量。由于响应量在均值点附近进行一阶摄动展开,  $f$  被视为仿射函数, 从而若参数处于椭球内, 响应量也必然在包含均值响应的连续区间  $[Y_{\min}, Y_{\max}]$  内。若增大随机参数的概率, 即相当于增加椭球大小, 引起的额外响应量也有一部分落在  $[Y_{\min}, Y_{\max}]$  内, 多少取决于  $f$  在椭球新增加区间上的取值。

图 1 给出了 2 维概率空间中参数的集合示意图。此时, 椭圆为等概率面,  $A$  点为响应量在椭圆上的最大值点,  $B$  点为最小值点。由于  $f$  在均值点进行了一阶摄动, 图中过  $A$  点和椭圆相切的直线  $AC$  是函数等值线,  $BD$  也是函数等值线。若结构的随机参数取在  $AC$  和  $BD$  中阴影部分构成的区间内, 其响应量必然在  $[Y_{\min}, Y_{\max}]$  内。由此可以知道: 在概率空间中, 若随机参数互不相关, 分布为高斯分布, 随机场相关尺度足够大, 则等概率密度面为椭球面, 它内切于超立方体, 决定了响应量的区间范围和概率大小。

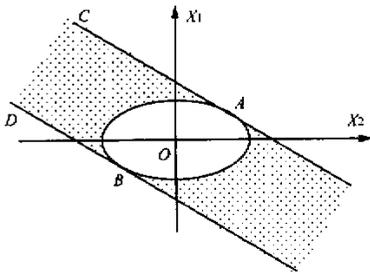


图 1 参数集合示意图

Fig.1 The picture of parameters set

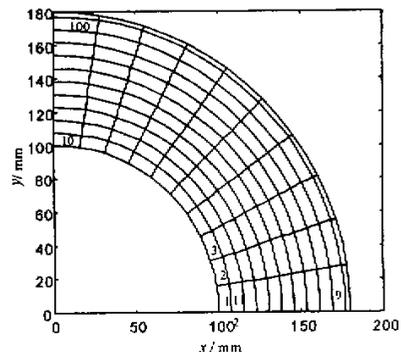


图 2 有限元网络

Fig.2 Finite element mesh

## 4 算例

以火箭发动机启动时的点火压力对药柱的影响为算例进行研究。药柱内半径为 100mm, 外半径为

177mm，壳体厚度为 3mm，单元划分如图 2。本文考虑药柱的泊松比、松弛模量为不确定参数，通过实验可以给出其变化区间。泊松比的平均值为  $\nu = 0.495$ ，变化范围  $\Delta = 0.003$ ；松弛模量的 Prony 级数取 3 项，各个参数的平均值为  $G_e = 2.36082e5\text{Pa}$ ， $a_0 = 3.318874e - 5/s$ ， $G_1 = 5.62438e4\text{Pa}$ ， $G_2 = 3.30147e4\text{Pa}$ ， $G_3 = 6.45613e5\text{Pa}$ ，参数在平均值左右 10% 内变化。

采用超立方体  $R_X$  和其顶点  $S_X^i$  构成的凸集合模型，图 3 和图 4 给出了八面体剪应变的上下界以及均值参数作用下的响应量的变化曲线。在进行摄动计算得到响应量对参数的梯度后，可以确定最小值和最大值的位置，从而既可以通过式 (21) (22) 得到响应量的区间范围，也可以直接在参数位置计算出上下限。图中实线为一阶摄动方法的计算结果，虚线为直接在超立方体顶点上计算得到的响应量。在结构比较复杂的情况下，直接计算需要消耗额外时间，其结果也相对准确。在超立方体区间内，响应量对参数的关系并不是线性关系，这导致了直接计算和梯度计算的差别。一般情况下，区间范围比较小，可以近似将  $f$  进行一阶摄动，引起的误差也比较小。

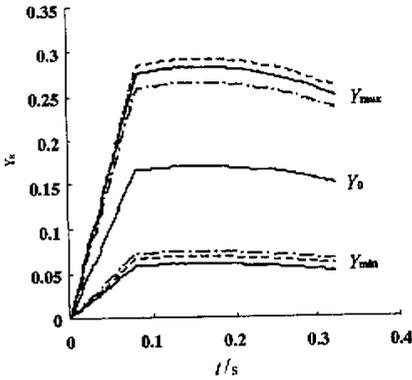


图 3  $\gamma_8$  区间随时间变化曲线

Fig.3 Uncertainty in  $\gamma_8$  vs time

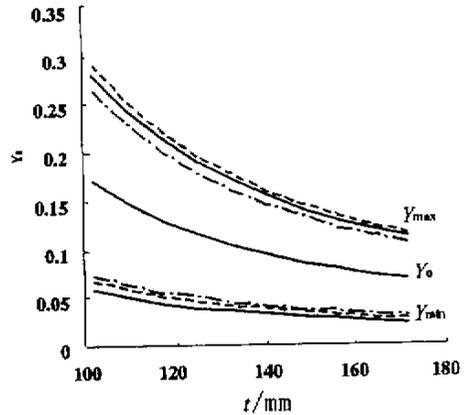


图 4  $\gamma_8$  区间随半径变化曲线

Fig.4 Uncertainty in  $\gamma_8$  vs radius

由于推进剂粘弹性的影响，响应量区间随时间改变。尽管梯度由各个时刻的响应量计算得到，它在时间尺度上是连续的，即  $f(X^0, t)$  对时间  $t$  连续，其梯度  $\nabla f(X^0, t)$  在本文情况下也随时间连续，保证了响应量的区间范围在时间上的连续性。

若将参数范围限制在超立方体的内切椭球内，图 3 和图 4 中的点划线给出了八面体剪应变的变化范围。若认为参数以概率的含义给出，图中的响应量范围也具有概率的意义，否则就是一般意义上的区间概念。由于椭球的参数区间包含在超立方体内，其响应量区间范围较小。

## 5 结论

一般情况下，随机参数的分布规律难以得到，通过概率方法得到的响应量区间和凸集合模型结果在特殊情况下有相同之处。本文方法在信息相对较少的情况下能够进行不确定性分析，弥补了药柱随机结构分析上的不足。由于梯度采用摄动方法计算，可以方便地扩展到二次分析。

## 参考文献：

[ 1 ] Benaroya H, Rehak M. Finite Element Methods in Probabilistic Structural Analysis : a Select Review[ J ]. Applied Mechanics Review, 1988, 41 (5): 201-213.

[ 2 ] 郭书祥, 冯元生, 吕震宙. 随机有限元方法与结构可靠性 [ J ]. 力学进展, 2000, 30 (3): 343-350.

[ 3 ] Ben-Haim Y, Elishakoff I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics[ M ]. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1990.

[ 4 ] 邱志平, 顾元宪. 结构静力位移的非概率凸集合理论模型的摄动数值算法 [ J ]. 固体力学学报, 1997, 17 (1): 86-89.

[ 5 ] 张海联, 周建平. 固体推进剂药柱泊松比随机粘弹性有限元分析 [ J ]. 推进技术, 2001, 22 (3): 245-249.

[ 6 ] 李杰. 随机结构系统—分析与建模 [ M ]. 北京: 科学出版社, 1996.

