文章编号：1001-2486（2002）02-0081-04

一种新的 Weibull 分布恒定应力加速寿命试验分析方法※

张春华，陈 循，李 岳
（国防科技大学机电工程与自动化学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：分析了 Weibull 分布恒定应力加速寿命试验常用的二步分析方法存在的不足，建立了一种新的构造数据分析方法。考虑到分布参数的相关性，该方法引入了 Weibull 分布特征寿命参数的二次估计，在模型拟合优度上高于原来的二步分析方法，使分析精度得到了改善。同时，该方法避免了原来二步分析方法的查表过程，便于软件实现和工程实际应用。

关键词：加速寿命试验；恒定应力试验；Weibull 分布；二步分析方法；构造数据方法
中图分类号：O34 **文献标识码：**A

Analysis for Constant-stress Accelerated Life Testing Data under Weibull Life Distribution

ZHANG Chun-hua，CHEN Xun，LI Yue
（College of Mechatronics Engineering and Automation，National Univ. of Defense Teehnology，Changsha 410073，China）

Abstract：The 2-step analysis method is the most widely used one in the statistical analysis for constant-stress accelerated life testing under Weibull distribution. Aiming at the deficiency of the 2-step analysis method，this paper develops a new analysis method based on constructed data. The method takes the relativity between Weibull distribution parameters into account，and introduces the 2nd. estimation for characteristic life of Weibull distribution. The method exceeds the 2-step analysis on model fitting optimization，and it improves the precision of estimation for accelerated life testing in turn. Moreover，the method is more convenient for software realization and engineering application.

Key words：accelerated life testing；constant-stress testing；Weibull distribution；2-step analysis method；constructed data

Weibull 分布恒定应力加速寿命试验的统计分析主要有图分析方法、二步分析方法和极大似然估计方法。图估计法的分析过程完全依靠手工绘图与肉眼观察，存在主观性大和重复性差等缺点。Weibull 分布恒定应力试验的极大似然估计不存在闭合解，其求解常采用迭代方法（如 Newton-Raphson 方法），但常用的迭代方法在求解该问题时存在初始点敏感的问题[1,2]。因此，二步分析方法成为 Weibull 分布恒定应力试验最常用的分析方法，1981 年颁布了相关的 4 个国家标准（GB2689.1—81，GB2689.2—81，GB2689.3—81，GB2689.4—81）。

1 假定与引理

假定Ⅰ 在不同的应力水平 S_1，S_2，…，S_K（$S_1 < S_2 < \cdots < S_K$）下，样本失效机理保持不变。

假定Ⅱ 样本在 S_i 下的寿命数据服从 Weibull 分布，即 $f(t) = (m_i/\eta_i)(t/\eta_i)^{m_i-1}\exp[-(t/\eta_i)^{m_i}]$，其中，$m_i$ 是形状参数，η_i 是特征寿命。

假定Ⅲ 样本在 S_i 下的特征寿命 η_i 与应力 S_i 满足如下的物理加速模型

$$\ln(\eta) = \sum_{j=0}^{n} a_j X_j \tag{1}$$

其中，X_j 是应力因素或应力因素的函数。当 $X = 1/T$（T 为绝对温度）时，（1）式简化为 Arrhenius 模型；当 $X = \ln(S)$，（1）式简化为逆幂律模型。

※ 收稿日期：2001-12-11
基金项目：武器装备预研项目资助（41319030101）
作者简介：张春华（1974—），男，博士生。

假定Ⅳ 样本的残存寿命仅依赖于已累积的失效和当前应力，而与累积方式无关。

该假定亦被称为 Nelson 假设。其数学意义为：若样本在 S_i 作用下工作 t_i 时间的累积失效概率为 $F_{S_i}(t_i)$，则可以通过 Nelson 假设在 S_j 下找到 t_j，使 $F_{S_i}(t_i) = F_{S_j}(t_j)$，那么二者累积的寿命消耗相当，并可以由此定义加速因子 $K_{ij} = t_j / t_i$。

引理Ⅰ $T \sim F_t(t) = 1 - \exp[-(t/\eta)^m]$，则 $Y = T^m \sim F_y(y) = 1 - \exp(-\lambda y)$，其中 $\lambda = \eta^{-m}$，记 $\theta = 1/\lambda = \eta^m$，即 Weibull 分布数据的 m 次幂服从指数分布。

证明： $F_y(y) = P(T^m < y) = P(T < y^{1/m}) = F_t(y^{1/m}) = 1 - \exp[-(y^{1/m}/\eta)^m] = 1 - \exp[-\lambda y]$。

2 问题的提出

假设从一批样本中随机抽取 n 个样本在 k 个加速应力水平下进行恒定应力加速寿命试验，在应力水平 S_i 下投试的样本数为 n_i，失效数为 r_i，其失效时间分别为 $t_{i,1}$，$t_{i,2}$，…，t_{i,r_i} （$i = 1, 2, \cdots, k$），试验采取定数截尾，求解样本在正常使用应力水平 S_0 下的寿命统计特征。

2.1 形参约束

文献［7］从 Nelson 假设出发，对常见寿命分布下的加速因子进行了讨论，推导了加速因子的统计表达，并得到了不同应力水平之间寿命分布参数存在的统计约束。对于 Weibull 分布的加速寿命试验数据，文献［7］有如下的结论。根据假定Ⅳ，若 $F_{S_i}(t_i) = F_{S_j}(t_j)$，即 $\exp[-(t_i/\eta_i)^{m_i}] = \exp[-(t_j/\eta_j)^{m_j}]$，则 $K_{ij} = t_j/t_i$。$\exp(\cdot)$是严格单调函数，因此 $(t_i/\eta_i)^{m_i} = (K_{ij}t_i/\eta_j)^{m_j}$，因为该方程对于任一寿命数据 t_i 恒成立，所以有 $m_i = m_j$，$K_{ij} = \eta_j/\eta_i$。

若维持样本在不同应力水平下失效机理的一致性，则各应力水平下 Weibull 分布的形状参数满足恒等约束。在文献［7］以前的有关加速寿命试验统计分析的文献中，上述命题一般都是作为前提假设提出来的，文献［7］给出了具体的证明。

2.2 二步分析方法的不足

二步分析方法的基本步骤为：① 利用最好线性无偏估计（BLUE）或者简单线性无偏估计（G LUE）对各加速应力水平下的 Weibull 分布参数进行拟合，并在恒等约束下对形参进行加权平均，得到各量级一致的形参估计，即二次估计；② 对第一步拟合得到的特征寿命与加速应力水平的关系进行模型拟合，从而利用模型外推进行使用条件下的寿命估计。由于 BLUE 与 GLUE 的计算过程需要查可靠性试验用表[8]，所以二步分析方法的计算过程比较繁琐，且不易于软件实现。

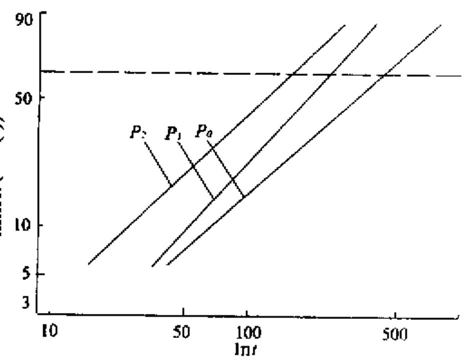

图1 文献[5]的 Weibull 分布图

Fig.1 The Weibull plot in reference ［5］

考虑到分布参数 m 和 η 之间的相关性，形参估计的变化必然引起特征寿命估计的变化。二步分析方法在得到形参的二次估计以后，特征寿命参数的估计却没有更新。本文借用文献［5］中的一组试验结果说明该问题。在某滚动轴承的加速寿命试验中，失效物理分析表明轴承在三个应力水平下的失效机理相同。Weibull 分布拟合的结果（见图1）显示应力水平 P_1 的形参与 P_0、P_2 相比存在较大的误差，因此可以推测 P_1 的特征寿命同样也存在较大误差。二步分析方法采用加权平均对 P_1 的形参进行了误差修正，而特征寿命的估计误差却没有进行修正，这必然会影响到后续分析的模型回归及寿命预测，使得分析精度降低。

3 构造数据方法

构造数据方法的基本思想是在得到形参的二次估计 $\hat{m}$ 以后，对所有的寿命数据进行 $\hat{m}$ 次幂得到 k 组新的寿命数据，即构造数据，并以构造数据的寿命参数进行加速模型拟合。由于经过了形参二次

估计的次幂处理，构造数据的寿命参数即相当于原特征寿命的二次估计。

3.1 形参估计

为了避免二步分析方法的查表过程，在形参估计时采用了逆矩估计。对于 Weibull 分布的 $t_j(j=1,\cdots,r)$，若令 $u_j(m)=\sum_{k=1}^{j}t_k^m+(n-j)t_j^m(j=1,\cdots,r)$，则分布参数的逆矩估计为[6]：$\sum_{j=1}^{r-1}\ln\frac{u_r(m)}{u_j(m)}=r-1$。采用试探方法进行逆矩估计求解，上式变形即为 $1+(r-1)\ln u_r(m)-\sum_{i=1}^{r-1}\ln u_i(m)=r$，若令 $r(m)=1+(r-1)\ln u_r(m)-\sum_{i=1}^{r-1}\ln u_i(m)$，则简化为 $r(m)=r$。以 $m(l)=1$ 为起点进行尝试，计算 $r(m)$的值：

若 $r(m)=r$，则 $m=m_i(l)$，结束试探；若 $r(m)>r$，则 $m<m_i(l)$，令 $m(l+1)=m(l)-\Delta m$，继续试探；若 $r(m)<r$，则 $m>m_i(l)$，令 $m(l+1)=m(l)+\Delta m$，继续试探。其中 Δm 应选为递减序列。若由此得到的形参点估计分别为 $\hat{m}_1$，$\hat{m}_2$，…，$\hat{m}_k$，则 m 的二次估计为[6]：$\hat{m}=\sum_{i=1}^{k}n_i\hat{m}_i/\sum_{i=1}^{k}n_i$

3.2 特征寿命的二次估计

在获得形参 m 的二次点估计以后，可给出如下的构造数据：

$$(y_{i,1},\ y_{i,2},\ \cdots,\ y_{i,r_i})=(t_{i,1}^{\hat{m}},\ t_{i,2}^{\hat{m}},\ \cdots,\ t_{i,r_i}^{\hat{m}})\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

根据引理Ⅰ，该构造数据 $y_{i,j}$近似服从$\lambda_i=\eta_i^{-m}$的指数分布，因此其平均寿命 θ_i 的极大似然点估计为

$$\theta_i=[y_{i,1}+\cdots+y_{i,r_i}+(n-r_k)y_{i,r_i}]/r_i,\quad(i=1,2,\cdots,k)\tag{2}$$

由于 $\hat{\theta}_i=\eta_i^{\hat{m}}$，所以(2)式实际上也是特征寿命参数 η_i 的二次估计。

据文献[9]，$\ln\theta_i$ 的无偏估计为

$$\delta_i=\ln\tau_i-\varphi(r_i),\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

其中 $\tau_i=y_{i,1}+\cdots+y_{i,r_i}+(n-r_{r_i})y_{i,r_i}$，而 $\varphi(r_i)=\sum_{i=1}^{r_i-1}\frac{1}{i}-c$，$c$ 为欧拉常数，$c=0.577215664\cdots$。

其估计方差为

$$D(\delta_i)=D(\ln\tau_i)=\zeta(2,r_i-1),\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

其中 $\zeta(\cdot)$ 为黎曼 ζ 函数，$\zeta(2,\ r_i-1)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{r_i-2}\frac{1}{n^2}$。

3.3 模型求解

将 $\theta=\eta^m$ 代入假定Ⅲ中的（1）式可得 $\ln(\theta^{1/m})=\sum_{j=0}^{n}a_jX_j$，即 $\ln(\theta)=m\sum_{j=0}^{n}a_jX_j$，因此可得转换模型 $\ln(\theta)=\sum_{j=0}^{n}c_jX_j$，其中 $c_j=ma_j$。于是，对于 $i=1$，2，…，k，可得$\begin{cases}E(\delta_i)=\sum_{j=0}^{n}c_jX_{j,i}\\D(\delta_i)=\zeta(2,\ r_i-1)\end{cases}$。

若记

$$\Delta=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\cdots\\\delta_k\end{pmatrix},\ X=\begin{bmatrix}X_{0,1}&X_{1,1}&\cdots&X_{n,1}\\X_{0,2}&X_{1,2}&\cdots&X_{n,2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\X_{0,k}&X_{1,k}&\cdots&X_{n,k}\end{bmatrix},\ c=\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\\cdots\\c_n\end{pmatrix},\ V=\begin{bmatrix}\zeta_1&&0\\&\zeta_2&\\&&\ddots\\0&&\zeta_k\end{bmatrix}$$

于是有$\begin{cases}E(\Delta)=Xc\\D(\Delta)=V\end{cases}$，根据高斯—马尔可夫定理，可得 c 的最小方差无偏估计

$$\hat{c}=(X^{\mathrm{T}}V^{-1}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}V^{-1}\Delta\tag{3}$$

其协方差阵为 $D(\hat{c})=(X^{\mathrm{T}}V^{-1}X)^{-1}$.

4 算例分析

4.1 算例

文献［10］讨论了某型He-Ne激光器的加速寿命试验，加速应力为工作电流 I，加速模型为逆幂律模型，即 $\ln\eta=-\ln K-C\ln V$。文献［3］讨论了某变压器中电绝缘的加速寿命试验，加速应力为工作电压 V，加速模型同样为幂律模型 $\ln\eta=-\ln K-C\ln V$。本文分别采用二步分析方法和构造数据方法对这两组加速寿命试验数据进行了对比分析，分析结果见表1。

表1 算例分析结果

Tab.1 The analysis results in examples

		$(m,\ -\ln K,\ -C)$	AIC
算例1	二步分析方法	(2.09，12.287，－1.073)	1708.6
	构造数据法	(2.12，12.235，－1.068)	1702.0
算例2	二步分析方法	(2.29，12.456，－3.4624)	292.7
	构造数据法	(2.21，12.331，－3.4143)	280.6

4.2 方法比较分析

Akaike信息准则（AIC）[4]是目前应用较为广泛的统计模型择优准则，它较好地反映了统计模型对原始试验数据的拟合优度。AIC定义为 $\mathrm{AIC}=-2[\ln(L_{\max})-r]$，其中 $L_{\max}$ 表示极大似然函数值，r 表示统计模型的未知参数个数。AIC函数值越小，统计模型对原始数据的拟合程度就越好。本文采用Akaike信息准则作为方法对比分析的判据，分析结果见表1。AIC的对比结果表明，构造数据方法的统计模型对原始寿命数据的拟合优度高于二步分析方法。

5 小结

Weibull分布下的恒定应力加速寿命试验的统计分析是加速寿命试验中经常讨论的一个传统课题。提出的构造数据方法在模型拟合优度上高于二步分析方法，使统计分析精度得到了改善。本文方法避免了二步分析方法的查表过程，使分析过程更加流程化，便于软件实现，具有更高工程应用价值。

参考文献：

［1］ Wendai W. Fitting the Weibull Log-Linear Model to Accelerated Life-Test Data［J］. IEEE Trans. Reliability，2000，R-49（2）：217-223.

［2］ Watkins A J. Review：Likelihood Method for Fitting Weibull Log-Linear Models to Accelerated Life-Test Data［J］. IEEE Trans. Reliability，1994，R-43（3）：361-365.

［3］ Hirose H. Estimation of Threshold Stress in Accelerated Life-Testing［J］. IEEE Trans. Reliability，1993，R-42（4）：650-657.

［4］ Akaike H. Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle［C］. 2 nd Int'l Symp. Information Theory，1973：267-281.

［5］ 王坚永，庄中华. 滚动轴承可靠性加速寿命试验研究［J］. 轴承，1996（9）：23-28.

［6］ 茆诗松，王玲玲. 加速寿命试验［M］. 北京：科学出版社，1997.

［7］ 张春华，陈循，杨拥民. 常见寿命分布下环境因子的研究［J］. 强度与环境，2001（4）：7-12.

［8］ 中国电子技术标准化研究所. 可靠性试验用表（修订本）［M］. 北京：国防工业出版社，1987：37-239.

［9］ 茆诗松. 指数分布场合下步进应力加速寿命试验的统计分析［J］. 应用数学学报，1985，8（3）：311-315.

［10］ 杨之昌，马秀芳. 长寿命He-Ne激光器的加速寿命试验［J］. 中国激光，1989，16（7）：410-412.