

文章编号: 1001-2486 (2002) 02-0091-04

# 并联机构的奇异位形分析及冗余驱动控制方法\*

沈辉<sup>1</sup>, 吴学忠<sup>1</sup>, 李圣怡<sup>1</sup>, 李泽湘<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073; 2. 香港科技大学电气与电子工程系, 香港)

**摘要:** 运用微分几何的方法分析了存在于并联机构中的各种奇异位形。采用冗余驱动方法解决并联机构奇异位形的控制问题。设计并实现了平面二自由度并联实验装置, 并进行了冗余驱动控制实验。

**关键词:** 并联机构; 奇异位形; 冗余驱动

中图分类号: TH112 文献标识码: A

## Analysis of Singularity and Redundantly Control of Parallel Manipulators

SHEN Hui<sup>1</sup>, WU Xue-zhong<sup>1</sup>, LI Sheng yi<sup>1</sup>, LI Ze-xiang<sup>2</sup>

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Thechnology, Changsha 410073, China;

2. Department of EEE, Hong Kong Univ. of Science and Technology, Hong Kong)

**Abstract:** This paper analyses the various singular configurations of parallel manipulators using differential geometry. In order to perform an effect control of parallel manipulators at singularity, an over-control method is discussed. Finally this paper tests the over-actuated PD strategy on the two degree-of-freedom planar parallel robot and simulations verify the method proposed.

**Key words:** parallel manipulator; singular configuration; over-control

并联机构相对于传统的串联机构具有刚度大、执行力矩大和控制精度高的特点, 因此可以广泛地应用于机械装配、载重机构、模拟训练装置和高精密机床的结构设计中, 同时也产生奇异位形增多、工作空间缩小的缺点。目前减小机构奇异位形影响的有效方法之一是采用驱动关节冗余的控制方法<sup>[1]</sup>。

为了实现并联机构的有效控制, 首先应分析机构的奇异位形。对这一问题国内外学者已经进行了大量的研究。如 Gosselin<sup>[2]</sup>利用速度的输入和输出方程定义了串并联机构的奇异性, Merlet<sup>[3]</sup>、Had<sup>[4]</sup>和 Collins<sup>[5]</sup>分别采用线丛原理和 Clifford 代数对奇异位形存在的条件进行了研究, 国内学者则利用瞬时速度和矩阵分析的方法<sup>[8]</sup>确定并联机构的奇异位形。这些方法大多基于代数方法对奇异位形进行分类和定义, 或者针对具体机构的某些特殊性质进行计算, 对奇异位形中包含的丰富的几何性质则很少涉及。而采用微分几何方法研究并联机构中的奇异位形, 能够深刻了解机构奇异发生的本质, 为一般并联机构的奇异性分析建立统一的几何框架, 具有明显的数学和物理意义。

### 1 并联机构的奇异性分析

设并联机构的广义坐标约束方程的一般形式为<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) := (h_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, h_k(\boldsymbol{\theta}))^T = 0 \quad (1)$$

$\boldsymbol{\theta} \in E$  称为并联机构的广义坐标,  $E$  称为广义坐标空间。机构的位形空间可以表示为

$$Q = \{\boldsymbol{\theta} \in E : \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = 0\} = \mathbf{H}^{-1}(0) \subset E \quad (2)$$

并联机构末端执行器的运动空间称为并联机构的工作空间  $WS$ 。对于平面机构,  $WS$  一般为  $SE(2)$  或  $R^2$ , 而对于空间机构,  $WS$  一般为  $SE(3)$  或  $R^3$ 。所有驱动关节  $\boldsymbol{\theta}_i$  组成并联机构的驱动关节空间。如果机构中彼此独立的驱动关节个数大于执行器的运动维数, 则并联机构处于冗余驱动 (over-actuat-

\* 收稿日期: 2001-11-19

基金项目: 国家自然科学基金 - 香港青年学者合作研究基金资助项目 (50029501)

作者简介: 沈辉 (1975-), 男, 博士生。

ed) 状态。并联机构各空间的映射关系可以用图 1 来说明, 其中映射  $i: Q \rightarrow i(Q) \subset E$  代表位形空间向广义坐标空间的包含映射。

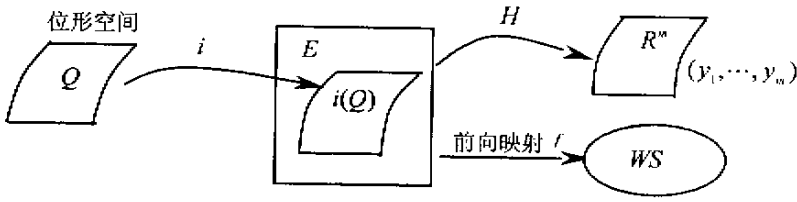


图 1 并联机构各抽象空间之间的映射关系

Fig.1 The relations between the various spaces in parallel manipulators

1.1 位形奇异性

定义 1 对于约束方程 (1) 所描述的并联机构系统, 如果其 Jacobian 矩阵  $\frac{\partial H}{\partial \theta}$  在  $p$  点行不满秩, 则并联机构在  $p$  点处于位形奇异状态。

从微分几何的角度看, 并联机构的位形空间  $Q$  在位形奇异状态下不再是广义坐标空间的局部嵌入子流形 (embedded manifold)。对 (1) 式进行微分, 得到约束方程的 1-形式  $dh_i, i = 1, \dots, m$ , 这些 1-形式可以看作是机构在不同方向上的约束力。于是机构处于位形奇异下的另一个判断标准是所有这些由约束方程得到的 1-形式线性相关。由于 1-形式线性相关的充要条件是它们的外积为零, 由此得到了判断并联机构是否处于位形奇异状态的另一个标准

$$dh_1 \wedge dh_2 \wedge \dots \wedge dh_m|_p = 0 \tag{3}$$

注意到, 式 (3) 的计算是不依赖于具体参考坐标系的。其中,  $p$  为位形奇异的坐标。

处于位形奇异状态的机构将至少在一个方向上失去约束, 因此整个机构在至少一个方向上存在瞬时速度, 这为直接判定机构的位形奇异提供了依据。以平面 2 自由度并联机构 (如图 2 所示) 为例, 由定义 1 或公式 (3) 可以计算得到该机构具有四组位形奇异, 每组奇异位形具有 4 种不同的状态。图 2 (a) 为其中的一种位形奇异状态。

1.2 驱动奇异性

由所有的驱动关节构成的空间  $J_a$  称为并联机构的驱动关节空间。  $p: Q \rightarrow J_a$  为位形空间向驱动关节空间的自然投影。正常情况下该映射是微分同胚的, 也就是说由驱动关节坐标就可以完全决定当前机构所处的位形状态。这点可以通过该映射诱导的切映射  $T_{qp}: T_q Q \rightarrow T_q J_a$  的性质来判断。

定义 2 设  $p: Q \rightarrow J_a$  为并联机构位形空间  $Q$  向驱动关节空间  $J_a$  的自然投影。如果该投影映射在  $p$  点处的切映射  $T_{qp}$  不满秩, 则  $p$  点所代表的位形称为并联机构的驱动奇异位形。

并联机构处于驱动奇异位形时, 机构的瞬时移动不能由驱动关节完全确定。即使固定所有的驱动关节, 机构仍旧可以瞬时移动, 甚至产生内部自运动 (self-motion)。这个性质可以作为直接判断并联机构是否处于驱动奇异状态的依据。

由于定义中的投影映射很难计算, 下面采用另外一种方法计算驱动奇异位形。对约束方程 (1) 进行微分, 得到

$$J\dot{\theta} + J^* \dot{\phi} = 0 \tag{4}$$

其中,  $\theta$  和  $\phi$  分别代表  $m$  个驱动关节和  $n - m$  个被动关节,  $J$  和  $J^*$  分别是它们的 Jacobian 矩阵。其中正常驱动情况下的  $J^*$  是  $k \times k$  维方阵。可以通过计算  $J^*$  的特征值判断机构的驱动奇异性。如果矩阵  $J^*$  在某点坐标下的某个特征值为零, 则机构在该点处的位形是驱动奇异的, 并且与该零特征值所对应的特征向量表明了机构因为驱动奇异而获得的多余自由度的方向。

仍然以平面二自由度并联机构为例, 由  $\det(J^*) = 0$  得到驱动奇异发生的条件

$$\sin(\phi_1 + \phi_2 - \pi) \sin(\theta_3 - \phi_3) = 0 \tag{5}$$

图 2 (b) 显示了其中  $\phi_1 = -\phi_2$  时的驱动奇异位形。这时的  $\text{rank}(J^*) = 3$ , 对应于零特征值的特征向量

为  $(-0.7071, 0, 0, 0.7071)$ ，这表明处于该位形下的机构是驱动奇异的，并且在坐标为  $(-0.7071, 0, 0, 0.7071)$  的方向获得一个瞬时的自由度（如图 2(b) 中的箭头所示）。

### 1.3 末端执行器奇异性

**定义 3** 设  $f: Q \rightarrow WS$  为并联机构位形空间  $Q$  向工作空间  $WS$  的正向映射。如果该映射在  $x$  点处的切映射  $T_x f: T_x Q \rightarrow T_x WS$  不满秩，机构处于末端执行器奇异位形，相应的  $x$  点称为并联机构的末端执行器奇异点。

并联机构的末端执行器奇异点与串联机构的奇异位形含义一致。机构处于末端执行器奇异位形时，末端执行器在某些方向上的瞬时速度不能由机构的位形确定，为了使末端执行器获得奇异方向上的速度，关节空间必须提供很大的驱动速度。设切映射  $T_x f: T_x Q \rightarrow T_x WS$  诱导的余切映射为  $T_x^* f: T_x^* WS \rightarrow T_x^* Q$ ，机构处于末端执行器奇异位形时，施加在执行器的某个或某些方向上的外力正好处于该余切映射的零化空间内，它们在驱动关节空间内的像接近于零，这表示对于施加在末端执行器奇异方向上的外力（力矩），驱动关节无法产生相应的驱动力（力矩）加以抵消，抵消的力（力矩）只能由机构的机械约束本身提供，因此可能破坏整个系统的机械结构。

类似于驱动奇异位形，也可以通过机构前向运动学模型的 Jacobian 矩阵分析机构的末端执行器奇异性发生的位置和方向。

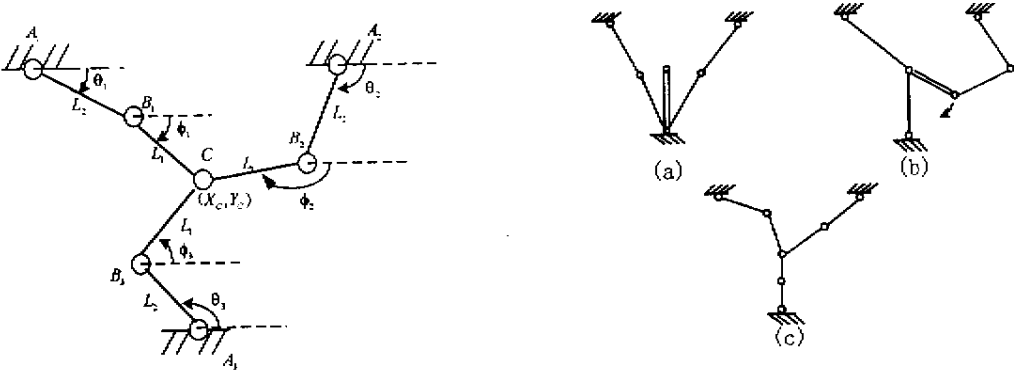


图 2 二自由度平面并联机构及各种奇异位形 (a) 位形奇异 (b) 驱动奇异 (c) 末端执行器奇异

Fig.2 The 2-DOF planar parallel manipulator and its various singularities

(a) Configuration singularity (b) Actuate singularity (c) End-effector singularity

## 2 冗余驱动控制

约束系统的动力学模型<sup>[7]</sup>一般表示为

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + N = \tau + A^T \lambda \quad (6)$$

其中， $\lambda \in R^6$  为拉格朗日乘子， $M(\theta) = \text{diag}(M_1, M_2, M_3) \in R^{6 \times 6}$  和  $C(\theta, \dot{\theta})$  分别是系统的惯量矩阵和哥氏矩阵， $\theta$  代表系统的所有关节。设  $\theta_a$  为系统的驱动关节， $\dot{\theta} = J_i \dot{\theta}_a$  是包含映射  $\theta = \varphi(\theta_a)$  的微分形式。利用投影映射  $P_\omega: T_\theta^* E \rightarrow T_\theta^* Q$  将 (6) 式映射到位形空间的余切空间上  $T^* Q$ <sup>[7]</sup>

$$P_\omega M J_i \ddot{\theta}_a + P_\omega (C_1 + N) = P_\omega \tau \quad (7)$$

其中  $P_\omega = I - J^T (J M^{-1} J^T)^{-1} J M^{-1}$ 。在平面二自由度并联机构中取  $\theta_{1,2,3}$  为驱动关节， $\phi_{1,2,3}$  为被动关节，由于对应于被动关节的力矩为零，不妨设对应于驱动关节的力矩为  $\hat{\tau} = (\tau_1, \tau_{33}, \tau_5)^T$ ， $\hat{P}_\omega = [p_1, p_3, p_5]$  是由  $P_\omega$  中对应于驱动关节的列向量组成的矩阵。因此

$$\hat{\tau} = \hat{P}_\omega \tau \in R^6 \quad (8)$$

假设参照曲线在关节空间的坐标为  $\theta_d(t)$ ，采用 PD 控制算法，得到控制力矩为

$$\hat{\tau} = P_\omega M J (\ddot{\theta}_d - K_v \dot{e} - K_p e) + P_\omega (C_1 + N) \quad (9)$$

其中  $e = \theta_a - \theta_d$ ,  $K_v$  和  $K_p$  分别为微分和比例系数。将 (9) 代入 (7) 式得到系统的闭环方程为

$$P_\omega MJ_i (\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e) = 0 \tag{10}$$

适当选择微分和比例系数  $K_v$  和  $K_p$  将保证系统在关节空间内对参照曲线的渐进稳定跟踪。

### 3 实验结果

我们与香港科学技术大学合作,设计并实现了平面二自由度并联机构装置<sup>[6]</sup>。该实验装置由固定在基座上的三个驱动关节和并联结构的机械臂组成。由于采用了冗余驱动控制方案,提高了系统的刚度并有效避免了机构的驱动奇异性。图 3 显示了二自由度并联机构在驱动关节空间内对参考目标的跟踪曲线。

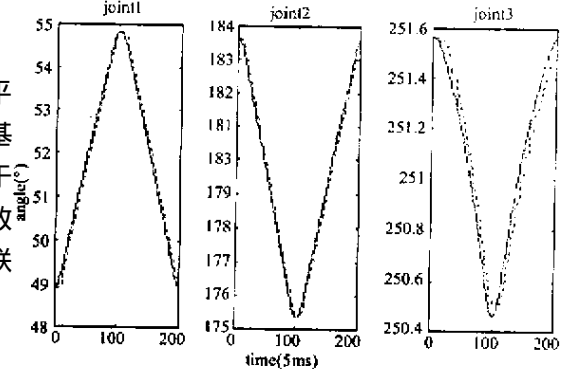


图 3 驱动关节空间内的冗余驱动控制跟踪曲线

Fig.3 The tracking error of over-actuated control in actuated joint space

### 4 结论

采用微分几何方法研究了并联机构中各种奇异位形的定义和判定条件,分析了机构奇异性对机构性能的影响。为了消除并联机构中的驱动奇异性,研究了冗余驱动的控制方法。设计并实现了平面二自由度并联机构实验装置,并采用冗余 PD 控制方法实现了机构的跟踪控制过程。实验结果表明,所设计的控制算法能够使并联机构渐进稳定地跟踪参考曲线。

### 参考文献:

[ 1 ] Vincent K C , Imme E U . Investigation of the Deficiencies of Parallel Manipulators in Singular Configurations Through the Jacobian Nullspace [ C ] . Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation Seoul , Korea , May , 2001 : 21 - 26 .

[ 2 ] Gosselin C M . Singularity Analysis of Closed-loop Kinematic Chain [ J ] . IEEE Trans. on Rob. & Aut. , 1990 , 6 ( 3 ) : 281 - 290 .

[ 3 ] Merlet J P . Singular Configuration of Parallel Manipulators and Grassman Geometry [ J ] . Int. J. of Rob. Res. , 1989 , 8 ( 5 ) : 45 - 56 .

[ 4 ] Hao F . Conditions of Line-based Singularities in Spatial Platform Manipulators . [ J ] J. of Robotic Systems , 1998 , 15 ( 1 ) : 43 - 55 .

[ 5 ] Collins C L . The Quartic Singularity Surfaces of Planar Platforms in the Clifford Algebra of the Projective Plane [ J ] . Mech. Mach. Theory , 1998 , 33 ( 7 ) : 931 - 944 .

[ 6 ] 吴宇列,吴学忠,李圣怡.平面二自由度并联执行机构的设计与实现 [ J ] . 国防科技大学学报. 2001 , 23 ( 1 ) .

[ 7 ] Liu G F , Wu Y L , Li. Z X . Analysis and Control of Redundant Parallel Manipulators [ C ] . IEEE International Conference on Robotics and Automation ( ICRA ) . 2001 : 3748 - 3754 .

[ 8 ] 赵新华,彭商贤.并联机器人奇异位形研究 [ J ] . 机械工程学报. 2000 , 36 ( 5 ) : 35 - 38 .



