文章编号：1001-2486（2002）02-0095-06

正态总体下分布参数的 Bayes 序贯估计※

张金槐
（国防科技大学人文与管理学院，湖南 长沙 410073）

摘 要：论述正态总体分布参数的序贯估计和 Bayes 序贯估计问题。在 Stein 的双子样序贯估计的基础上，构造了 Bayes 双子样序贯估计，并作了剖析。此外，为了适应当前试验场地“试试看看，看看试试”的试验分析和鉴定的需要，给出了以序贯 Bayes 检验为基本出发点，使检验和序贯估计相联合的分析方法。

关键词：Bayes 估计；序贯检验；序贯估计
中图分类号：O212 文献标识码：A

Bayes Sequential Estimation of the Parameter for Normal Sample

ZHANG Jin-huai
(College of Humanities and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract In this paper, the sequential estimation of the parameter of normal distribution is studied. At first, the Bayes double sampling sequential estimation method is constructed. And then, as the requirment for testing analysis, the recursive algorithm of the estimator of distribution parameter is given. Thus, it can easily be realized in engineering applications.

Key words Bayes estimation; sequential testing; sequential estimation

1 问题的提出

小子样下试验结果的精度评估，我们曾运用 Bayes 方法。小子样统计推断，并不限于 Bayes 方法。近期以来，对于不同试验条件下的精度评估，运用试验设计方法，给出小子样下的分析方法。例如文献［2］，研究了小子样下的命中概率估计问题，且已有效地应用于工程实践。因此，试验设计应视为小子样技术的重要内容，引起关注。此外，在试验过程中，常常运用“试试看看，看看试试”的方法。这种技术途径，在统计分析中就是序贯分析方法。序贯方法的平均试验数常小于经典统计方法的试验数，而 Bayes 序贯方法，将可能使子样容量进一步缩小。

要设计一个序贯估计方法，必须建立一个准则，它指出何时终止试验，且作出终止试验时的决策。下面将在 Stein 双子样序贯估计的基础上，构造 Bayes 序贯估计方法。为了应用，还将论述序贯检验检验和估计的综合分析方法。

2 Bayes 双子样序贯估计

Stein 对于正态总体的均值，构造了双子样序贯区间估计方法。

设有正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2 均为未知。今从该总体作第一次抽样，得子样（x_1，…，x_n），而记（x_{n+1}，…，x_{n+m}）为从 $N(\mu,\sigma^2)$ 中取得的第二个独立的子样。记

S^2 为第一个子样的样本方差，即

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}^{(1)})^2,\quad \bar{x}^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

而 $\bar{x}$ 为联合子样的样本均值，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n+m}\sum_{i=1}^{n+m}x_i$$

※ 收稿日期：2001-10-14
作者简介：张金槐（1930—），男，教授。

令 $k=[2St_{n-1,\gamma}|\delta]^2$，其中 $t_{n-1,\gamma}$为具有 $n-1$ 个自由度的学生氏变量 $S(n-1)$ 分布 $100\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\%$ 上侧分位点，δ 为某个指定的数；而第二个子样的容量 m 可如下确定：

$$m=\begin{cases}0，\text{当 } k-n\leqslant 0,\\ \geqslant k-n \text{ 的最小正整数，当 } k-n>0.\end{cases}$$

则 $\bar{x}\pm\frac{\delta}{2}$为长度为 δ 的μ 的置信区间，置信系数$\geq\gamma$，即

$$P\left\{\bar{x}-\frac{\delta}{2}<\mu<\bar{x}+\frac{\delta}{2}\right\}\geqslant\gamma$$

这就是 Stein 的双子样抽样方案。

然而，从另一种观点，即 Bayes 统计观点来分析，增加信息量的途径除了增加子样容量（即二次抽样）外，还可以考虑其他信息，即验前信息。此时，再作序贯抽样，此时将会使置信估计有较好的结果。

按 Bayes 观点，分布参数 θ 看作随机变量，且具有验前分布（如概率密度 $\pi(\theta)$），而区间估计则为当子样 X 给定后，寻找一个与 X 有关的区间，它是固定的，随机变量 θ 落在此区间的概率为置信概率，这与经典统计中随机区间（由随机子样确定）包含 θ 的概率，在概念上不同。因此，Bayes 统计的出发点是确定 θ 的验后分布，由此作出 θ 的统计推断。

对于正态总体 $N(\theta,\sigma^2)$，如果 σ^2 为已知，θ 作为未知参数，它是随机的，假定 $\pi(\theta)\sim N(\mu,v^2)$，这里 μ，v^2 为 θ 的验前均值和方差，它们由验前信息确定，可看作已知的常量。可知当获取了子样 X 之后，θ 的验后密度为

$$\pi(\theta|X)\sim N(\mu_1,v_1^2)$$

其中

$$\mu_1=\frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n+v^2}\mu+\frac{v^2}{\sigma^2/n+v^2}\bar{x}_n,$$

$$v_1^2=\frac{\sigma^2v^2}{\sigma^2+nv^2}=-\frac{1}{n\sigma^{-2}+v^{-2}},\qquad \overline{x_n}\text{为子样均值}.$$

记 Θ 为参数空间，C 为 Θ 的子集。如果

$$\int_C\pi(\theta|X)\mathrm{d}\theta=P\{\theta\in C|X\}\geqslant 1-\alpha$$

则 C 为θ 的置信域，$1-\alpha$ 为置信概率。C 有各种不同的选取方法。如对正态总体，

$$\pi(\theta|X)\sim N(\mu_1,v_1^2)\triangleq N(\mu_n(X),\rho_n^{-1})$$

式中 $\mu_n(X)=\mu_1$，$\rho_n=n\sigma^{-2}+v^{-2}$。$\theta$ 的置信域为

$$C=(\mu_n(X)-Z_{\alpha/2}\rho_n^{-\frac{1}{2}},\mu_n(X)+Z_{\alpha/2}\rho_n^{-\frac{1}{2}})$$

其中 $Z_{\alpha/2}$是 $N(0,1)$的 $\alpha/2$ 分位数。ρ_n 是已知的，因此置信区间的长度为 $2Z_{\alpha/2}\rho^{-\frac{1}{2}}$。

从 $N(\theta,\sigma^2)$取 $i.i.d$ 子样$(x_1,\cdots,x_n)$，而$(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})$ 为第二批抽得的子样，m 为子样容量。记 μ_{n+m}为联合子样下的样本均值，ρ_{n+m}^{-1}为联合子样下的验后样本方差，此处 $\rho_{n+m}=(n+m)\sigma^{-2}+v^{-2}$。

于是按前面的置信估计，应有

$$P\{\mu_{n+m}-Z_{\alpha/2}\rho_{n+m}^{-\frac{1}{2}}<\theta<\mu_{n+m}+Z_{\alpha/2}\rho_{n+m}^{-\frac{1}{2}}\}\geqslant 1-\alpha\triangleq\gamma$$

$\gamma=1-\alpha$ 是所要求的置信概率。记 δ 为要求的置信区间的长度，那么，

1)如果

$$Z_{\alpha/2}\rho_n^{-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\delta}{2}$$

则有

$$P\left\{\mu_n(x^{(1)})-\frac{\delta}{2}<\theta<\mu_n(x^{(1)})+\frac{\delta}{2}\right\}\geqslant\gamma$$

其中 $\mu_n(x^{(1)})=\mu_n$，引入 $x^{(1)}$（第一次抽样所获得的容量为 n 的子样）为了说明 μ_n 是 $x^{(1)}$ 的函数。此时，终止试验；

2）如果

$$Z_{\alpha/2}\rho_n^{-\frac{1}{2}}>\frac{\delta}{2}$$

此时再抽取第二个子样（x_{n+1}，…，x_{n+m}），此处 m 为使

$$Z_{\alpha/2}\rho_{n+m}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\delta}{2}$$

的最小正整数，即 m 为使

$$m\geqslant 4Z_{\alpha/2}^2\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^2-\left(\frac{\sigma}{v}\right)^2-n$$

的最小正整数。这样，就构成了双子样 Bayes 序贯估计方案。

将 Bayes 双子样序贯方法与经典方法比较。在同样的置信水平下，经典区间估计的长度为 $2Z_\alpha\dfrac{\sigma}{\sqrt{m+n}}$，而 Bayes 双子样估计的区间长度为

$$2Z_{\alpha/2}\rho_{n+m}^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sigma/\sqrt{n+m}\cdot 2Z_{\alpha/2}}{\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{(n+m)v}}}<\frac{\sigma}{\sqrt{n+m}}2Z_{\alpha/2}$$

因此，Bayes 双子样序贯估计有较小的置信区间（在同样的 γ 之下）。

3 依赖于 Bayes 序贯检验的序贯估计

将序贯检验的停止准则作为序贯估计的停止准则，这样，检验的决策作出之后，随之确定出参数的估计。这种方法的好处在于不需另外给出序贯估计的停止准则。此外，检验与估计紧密结合，也符合试验分析和鉴定的常规要求。

设有统计假设

$$H_0:\theta\in\Theta_0\leftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$$

当 $\theta_0\in\Theta_0$，$\theta_1\in\Theta_1$ 时，有 $\theta_0<\theta_1$，且 $\Theta_0\cup\Theta_1=\Theta$（参数空间），$\Theta_0\cap\Theta_1=\phi$（空集）。

对于 i. i. d 子样（x_1，…，x_n），作验后加权似然比

$$O_n=\int_{\Theta_1}\left[\prod_{i=1}^n f(x_i\mid\theta)\right]\mathrm{d}F^\pi(\theta)\Big/\int_{\Theta_0}\left[\prod_{i=1}^n f(x_i\mid\theta)\right]\mathrm{d}F^\pi(\theta)$$

其中 $F^\pi(\theta)$为 θ 的验前分布函数，引入常数 A，B，$0<A<1<B$。运用下列序贯检验法则：

（1）当 $O_n\leqslant A$，则终止试验，采纳假设 H_0；

（2）当 $O_n\geqslant B$，则终止试验，采纳假设 H_1；

（3）当 $A<O_n<B$，则不作决定，继续进行下一次试验。

这就是序贯验后加权检验（SPOT）。

A，B 可由下式确定[3]：

$$A=\frac{\beta_{\pi_1}}{P_{H_0}-\alpha_{\pi_0}},\quad B=\frac{P_{H_1}-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}.$$

式中

$$P_{H_0}=\int_{\theta\in\Theta_0}\mathrm{d}F^\pi(\theta),\quad P_{H_1}=1-P_{H_0},\quad \alpha_{\pi_0}=\int_{\theta\in\Theta_0}\alpha(\theta)\mathrm{d}F^\pi(\theta)$$

此处 $\alpha(\theta)$为 $\theta\in\Theta_0$ 时，采纳 H_1 的概率（弃真的概率）：

$$\beta_{\pi 1}=\int_{\theta\in\Theta_0}\beta(\theta)\,\mathrm{d}F^{\pi}(\theta)$$

此处 $\beta(\theta)$为 $\theta\in\Theta_1$ 时采纳 H_0 的概率（采伪的概率）。具体实施上述方案时，按犯两类错误概率的容许限，确定出 α_{π_0}和 β_{π_1}，由此计算 A，B，由此确定出具体的 SPOT 方案。

在进行序贯检验时，n 从 1 开始。

当进行到 n 次试验，计算 O_n。如果 O_n 满足准则中的（1）或（2），则结束试验，作出采纳或拒绝 H_0 的决定。此时作两方面的分析，一是关于检验作出风险分析；一是作出 θ 的估值，记作 $\hat{\theta}_n$，

$$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n((X_1,\cdots,X_n);F^{\pi}(\theta))$$

并给出 $\hat{\theta}_n$ 的精度（$\mathrm{Var}\hat{\theta}_n$）或置信度分析。

如果 O_n 满足（3），此时不作决定，而进行下一次试验。但为了以后分析的需要，同样作出 θ_n 的估值及其精度分析。当进行了下一次试验之后，计算 O_{n+1}，验证条件(1)～(3)，为此循序进行，直到满足(1)或(2)时，终止试验。

在每次试验之后，均作出 θ 的估计，为了方便，估计以递推形式出现。如 $\hat{\theta}_{n+1}$，常表示为

$$\hat{\theta}_{n+1}=\hat{\theta}_n+\Delta\hat{\theta}_n$$

或者其他递推形式。

N 截尾方案可给出如下：假如在 $N-1$ 次试验之后仍未作出决策，那么，在第 N 次试验之后，将继续试验区 $\{X: A<O_n<B\}$ 分割为二个区域：

$$D_1=\{X: A<O_n\leqslant C\},\quad D_2=\{X: B>O_n>C\}$$

当子样 X 落入 D_1 时，采纳 H_0；而当 X 落入 D_2 时，采纳 H_1。这样，在 N 次试验之后必定终止试验，且作出决策。此时，可以证明 N 截尾方案犯两类错误的概率 α_N，β_N 的上界可给出如下[3]：

$$\alpha_N<\alpha_{\pi_0}+\overline{\Delta\alpha}_{N\pi_0}$$

其中 $\overline{\Delta\alpha}_{N\pi_0}=\int_{\theta\in\Theta_0}P\{C<O_N<B\mid\theta,\ \theta\in\Theta_0\}\,\mathrm{d}F^{\pi}(\theta)$；

$$\beta_N<\beta_{\pi_1}+\overline{\Delta\beta}_{N\pi_1}$$

其中 $\overline{\Delta\beta}_{N\pi_1}=\int_{\theta\in\Theta_1}P\{A<O_N<C\mid\theta,\ \theta\in\Theta_1\}\,\mathrm{d}F^{\pi}(\theta)$.

4 随机落点散布的序贯截尾检验和估计

随机落点偏差（纵向或横向）服从正态分布。这里以纵向偏差 X 的方差检验为例说明序贯截尾检验和估计的联合运用。记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，此处 μ 为落点系统偏差，记 $\sigma^2=D$，引入统计假设

$$H_0: D\leqslant D_0=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1: D>D_0$$

σ_0^2 是要求达到的设计指标。令 $\Theta_0=\{D: D\leqslant D_0\}$，$\Theta_1=\{D: D>D_0\}$，$D$ 的验前密度取作逆 Gamma 分布，即

$$\pi(D)=\begin{cases}\dfrac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}D^{-(\beta_0+1)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{D}}, & D>0\\ 0, & D\leqslant 0\end{cases}$$

$$\triangleq g(d;\alpha_0,\beta_0)$$

其中 α_0，β_0 为常量，由验前信息确定。例如，有 X 的历史数据 $X_1^{(0)}$，…，$X_{n_0}^{(0)}$，则 α_0，β_0 可取

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}(X_i^{(0)}-\bar{X}^{(0)})^2,\quad \beta_0=\frac{1}{2}(n_0-1)$$

式中

$$\bar{X}^{(0)}=\frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}X_i^{(0)}$$

记 $X=(x_1,\cdots,x_n)$为纵向偏差落点子样，则[3]：

$$O_n = \frac{K_{2\beta_1}(2\alpha_1/D_0)}{1 - K_{2\beta_1}(2\alpha_1/D_0)}$$

式中， $\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{1}{2}S^2$；$\beta_1 = \beta_0 + \frac{n}{2}$；$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$. $K_{2\beta_1}(\cdot)$为 $X^2_{2\beta_1}$的分布函数。

按要求，确定 α_{π_0}，β_{π_1}，计算出 P_{H0}，P_{H1}：

$$P_{H0} = \int_0^{D_0} g(D;\alpha_0, \beta_0)\mathrm{d}D = 1 - K_{2\beta_0}(2\alpha_0/D_0), P_{H1} = 1 - P_{H0}$$

引入常数 A，B：

$$A = \frac{\beta_{\pi_1}}{P_{H0} - \alpha_{\pi_0}},\ B = \frac{P_{H1} - \beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}$$

于是有 SPOT 方案：

1）当 $O_n \leqslant A$，终止试验，采纳 H_0；

2）当 $O_n \geqslant B$，终止试验，采纳 H_1；

3）当 $A < O_n < B$，不作决策，继续进行下一次试验。

为构造截尾方案，在 A，B 间嵌入 C（C 的选择按实际需要确定，见文 [3]），于是可形成 N-截尾方案，此方案犯两案错误概率的上界为

$$\bar{\alpha}_{N\pi_0} = \alpha_{\pi_0} + \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}\int_0^{D_0}\left[K_N\left(\frac{k_B}{D}\right) - K_N\left(\frac{k_C}{D}\right)\right]\cdot D^{-(\beta_0+1)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{D}}\mathrm{d}D;$$

$$\bar{\beta}_{N\pi_1} = \beta_{\pi_1} + \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}\int_0^{\infty}\left[K_N\left(\frac{k_C}{D}\right) - K_N\left(\frac{k_A}{D}\right)\right]\cdot D^{-(\beta_0+1)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_0}{D}}\mathrm{d}D.$$

式中 $k_A = \sigma_0^2\left[K^{-1}_{2\beta_1}\left(\frac{A}{1+A}\right) - 2\frac{\alpha_0}{D_0}\right]$，$k_B$，$k_C$ 只需将上式的 A 换作 B，C 即可。

上述积分计算，用数值方法进行。

在每次试验后，同时对 D 进行估计。我们采用递推方法。为了使用方便，有关结果综合如下：

由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 为未知，要对 $D = \sigma^2$ 作估计，在试验之前，考虑验前信息。设有验前子样 $(X_1^{(0)}, \cdots, X_{n_0}^{(0)})$，如果除此信息之外，无其他验前信息可利用，则按 Jeffrey 准则，假定 μ，D 的验前分布为 $\pi(\mu, D) \alpha \frac{1}{D}$，而 $\pi(\mu, D \mid X^{(0)}) \alpha f(\mu \mid D) g(D;\alpha_0, \beta_0)$，其中 $f(\mu \mid D) = N\left(\bar{X}^{(0)}, \frac{D}{n_0}\right)$。

$g(D;\alpha_0, \beta_0)$为逆 Gamma 分布密度，α_0，β_0 由 $X^{(0)}$确定，已如前述。此时，D 的验前估计为

$$D^{(0)} = \frac{\alpha_0}{\beta_0 - 1} = \frac{1}{n_0 - 3}\sum_{i=1}^{n_0}(X_i^{(0)} - \bar{X}^{(0)})^2$$

在第一次试验时，(μ, D) 的验前密度就是正态—逆 Gamma 分布密度函数，即

$$N\left(\bar{X}^{(0)}, \frac{D}{n}\right)\cdot g(D;\alpha_0, \beta_0)$$

当第一次试验之后，获得纵向落点偏差 $X_1^{(1)}$。此时，在上述验前分布之下，可以作出 D 的 Bayes 估计。常常有这种情况：武器系统的试验往往是进行批次试验，每一批次可进行若干次试验。因此，要去给出不同批次试验之下，D 的 Bayes 估计。为此，将上述第一次试验改作第一批试验。在第一批试验之后，获得纵向落点偏差子样 $X^{(1)} = (X_1^{(1)}, \cdots, X_{n_1}^{(1)})$，于是可算得 D 在 $X^{(1)}$之下的验后期望，即 D 在第一批次试验之后 D 的 Bayes 估计，它为

$$\hat{D}_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - 1}$$

式中

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{n_1}{2}(S^{(1)})^2 + \frac{1}{2}\frac{n_1(\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(0)})}{n_1\cdot\frac{1}{n_0} + 1}, \beta_1 = \beta_0 + \frac{n_1}{2} = \frac{n_0 + n_1 - 1}{2}.$$

一般地，关于 D 的 Bayes 估计的递推公式为

$$\hat{D}_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k - 1}$$

式中 α_k，β_k 由递推公式计算：

$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \Delta\alpha_k, \beta_k = \beta_{k-1} + \Delta\beta_k \quad k = 1, \cdots, N$，$N$ 为截尾试验批数。$\Delta\alpha_k = \frac{n_k}{2}(S^{(k)})^2 + \frac{n_k(\bar{X}^{(k)} - \bar{X}^{(k-1)})^2}{n_k\eta_{k-1} + 1}, \Delta\beta_k = \frac{n_k}{2}$；

式中

$$\eta_k = \frac{1}{n_k}, (S^{(k)})^2 = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}(X_i^{(k)} - \bar{X}^{(k)})^2, \bar{X}^{(k)} = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}X_i^{(k)}$$

可知 $\hat{D}_k$ 的验后方差为

$$\mathrm{E}[(D - \hat{D}_k)^2 | X^{(k)}] = \frac{\alpha_k^2}{(\beta_k - 1)^2(\beta_k - 2)}$$

上述递推公式就是配合 Bayes 序贯截尾检验所作的 Bayes 递推估计方法。

示例具有特殊性，但上述思想方法具有普遍性，可以运用于其他分布参数的 Bayes 序贯检验和估计。

参考文献：

[1] Anscombe F J. Sequential estimation [J]. Jour. Roy. Stat. Soc., Series B，15. 1-29. 1953.
[2] 王正向. 导弹单发命中概率小子样问题研究 [J]. 系统工程与电子技术，1993 (3)：27 – 44.
[3] 张金槐. 特小样本下落点密集度鉴定——SPOT 方法的运用 [J]. 飞行器测控技术，1989，(1)：1-6

(上接第 76 页)

参考文献：

[1] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems [M]. Boston：PWS Publication Corporation，1996.
[2] Saad Y. ILUT：A dual threshold incomplete LU factorization [R]. Minnesota：Computer Science Department，University of Minnesota，Unsi – 92 – 38，1992.
[3] D’azevedo E F，Forsyth P A，Tang Wei – pai. Towards a cost-effective ILU preconditioner with higher level fills [R]. Oak Ridge：Mathematical Sciences Section，Oak Ridge National Laboratory，CS-92，1992.
[4] 雷光耀，张石峰. 阶矩阵及其在传统预处理方法中的应用 [J]. 计算物理，1991，8 (2)：196 – 202.
[5] 雷光耀，黄朝晖. ICCG 法误差阵模与条件数的估计 [J]. 计算物理，1996，13 (4)：489 – 495.
[6] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法 [M]. 北京：北京大学出版社，1999.
[7] 李庆扬，易大义，王能超. 现代数值分析 [M]. 北京：高等教育出版社，1995.