

文章编号: 1001-2486 (2002) 03-0018-05

伪谱法模拟各向异性/非均匀介质中弹性波的传播*

张光莹, 曾新吾

(国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 数值模拟一直是研究弹性波在复杂介质中传播问题的有效手段之一。各向异性问题和非均匀问题日益引起关注。伪谱法是近年来发展较快、建立在弹性波动方程基础上的一种数值模拟方法。它的主要特征是将波动方程中的空间微分变换成频域中的乘法运算, 从而只需要较少的空间格点就可以得到较高的计算精度。介绍了伪谱法及其稳定性条件; 编制了一个适合于小型工作站或者 PC 机的模拟地震波在二维各向异性均匀/非均匀介质中传播的数值模拟程序, 模拟了各向异性/非均匀介质中弹性波传播理论, 分析了裂纹以及各向异性界面对波传播的影响。

关键词: 数值模拟; 伪谱法; 稳定性; 各向异性; 非均匀

中图分类号: O39 **文献标识码:** A

Numerical Modeling of Elastic Waves Propagating in the Anisotropic/Heterogeneous Media by the Pseudo-Spectral Method

ZHANG Guang-ying, ZENG Xin-wu

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Numerical modeling has long been recognized to be a powerful method of studying the wave propagation in media with complicated structures. More interests are aroused in the anisotropic problem and heterogeneous problem. The Pseudo-Spectral Method (PSM), with which global spatial derivatives are computed by multiplication in Fourier domain, is a new numerical modeling method based on the elastic wave equation developed in recent years. The main advantage of PSM is that it requires a relatively small number of grid points to achieve a specified accuracy. The PSM and its stability are presented. A 2-D PSM code based on workstation or PC is developed to model the 2-D elastic waves propagation in anisotropic/heterogeneous media.

Key words: numerical modeling; Pseudo-Spectral Method; stability; anisotropy; heterogeneous

数值模拟是研究复杂介质中的波动问题的有效手段之一。长期以来, 地震数据的数值模拟一直是提高对复杂介质中的波传播和相互作用研究的有力工具, 并且是一种很有效的解释工具。为了模拟地震波传播问题, 提出了很多的理论, 例如 Maslov 理论、有限差分方法、Born 近似、复层近似、Kirchhoff-Helmholtz 积分、边界积分方程、边界元方法等。

伪谱法^[1,2]是 20 世纪 70 年代被提出、并于 80 年代被引入地震学、近年来得到广泛应用的一种较先进的数值模拟方法。它具有高精度、节省计算时间、节省存储空间以及对计算区域内介质性质变化不用作特别处理等优点。适用于具有高速 CPU 和低速 I/O 以及较小存储空间的计算机。

1 基本理论

1.1 伪谱法简介^[3]

在 Cartesian 坐标系下, 忽略体力时, 线弹性波动方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002-01-05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (40074025); 教育部优秀青年教师资助计划项目

作者简介: 张光莹 (1973—), 女, 博士生。

其中 t 为时间, u_i 为 x_i 方向上的位移分量, c_{ijkl} 为介质的弹性常数, 对于完全各向异性介质其独立参数为 21 个, 此处应用了 Einstein 求和约定。

用伪谱法解方程 (1) 时, (1) 式的右边采用统一的空间格点来离散, 然后用傅立叶变换计算空间微分。对于位移分量 $a(x)$ ($= u_i, i = 1, 2, 3$) 的空间微分可以表示为:

$$\frac{\partial a(n \cdot \Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{N_x} \sum_{k=0}^{N_x-1} \left[\frac{2\pi i k}{N_x} \hat{a}(k) \exp\left(\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{N_x}\right) \right] \quad (2)$$

其中 Δx 为空间格点步长, N_x 是沿 x 方向划分的格点数, $a(x) = a(n \cdot \Delta x)$, $x = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), 以及

$$\hat{a}(k) = \sum_{n=0}^{N_x-1} \left[a(n \cdot \Delta x) \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi \cdot k \cdot n}{N_x}\right) \right]$$

时间微分采用二阶有限差分:

$$\begin{cases} \dot{a}(t + \Delta t/2) = \dot{a}(t - \Delta t/2) + \Delta t \ddot{a}(t) \\ a(t + \Delta t) = a(t) + \Delta t \cdot \dot{a}(t - \Delta t/2) + \Delta t^2 \cdot \ddot{a}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 \dot{a} 和 \ddot{a} 分别代表 $a(x, t)$ 的一阶和二阶的时间差分, 并且满足初始条件:

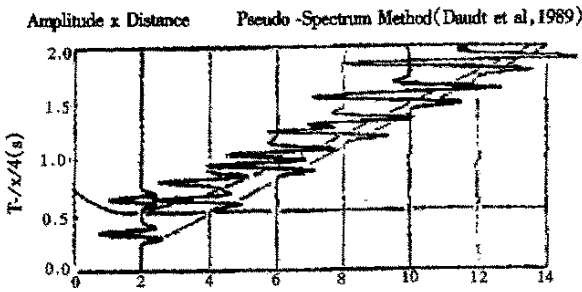
$$\ddot{a}(t) = \dot{a}(t) = a(t) = 0 \quad (t \leq 0)$$

$$\dot{a}(\Delta t/2) = \dot{a}(-\Delta t/2) + \Delta t \ddot{a}(0) = 0 \quad (t \leq 0)$$

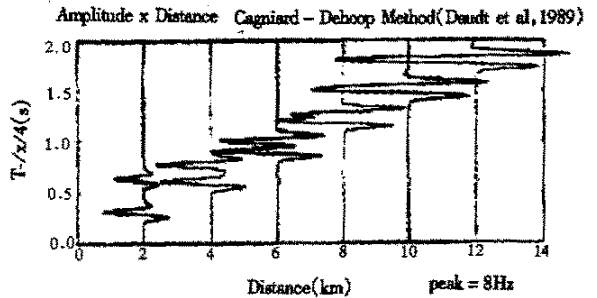
为了消除边界的反射, 我们应用了吸收边界条件来模拟波在无限弹性空间中的传播, 边界吸收函数定义如下:

$$w = \begin{cases} \exp\{-[\alpha(b - x_1)]^2\}, & \text{for } x_1 < b \text{ or } x_1 > L_{x1} - b \\ \exp\{-[\alpha(b - x_3)]^2\}, & \text{for } x_3 < b \text{ or } x_3 > L_{x3} - b \\ 1, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (4)$$

其中 α 是吸收系数, b 是开始吸收的宽度, L_{x1} 和 L_{x3} 分别是 x_1 和 x_3 方向的模型的尺度, 本文中分别取为 0.025、17、128、128。



(a) 用伪谱法模拟的结果



(b) Cagniard-DeHoop 方法模拟的结果

图 1 伪谱法和 Cagniard-DeHoop 方法处理平面模型的波形结果比较

Fig.1 Waves profiles using Pseudo-Spectral Method and Cagniard-DeHoop Method for plane model

图 1 中给出文献 [4] 中的用伪谱法和 Cagniard-DeHoop 方法(一种解析方法)处理平面模型时的结果比较, 图 1 可说明伪谱法是一种具有高精度的数值解方法, 模拟的具体参数参见文献 [4]。

1.2 伪谱法的稳定性条件

用伪谱法解方程 (1) 时, 对空间和时间都进行了离散化, 这种离散化必然导致计算误差, 误差主要来源于两个方面, 一个是离散空间产生的误差, 就是在离散的空间中表示函数; 另一个是时间微分造成的误差。如果这些误差随着时间的递推而增加, 则会导致解的不稳定性。研究表明伪谱法数值模拟的稳定性条件可表示为^[5]:

$$\alpha = V \Delta t / \Delta x < A$$

其中 V 是波速, Δt 是计算时的时间步长, Δx 是计算时的空间步长, α 是稳定性条件的上限值。因为纵波的速度大于横波的速度, 所以纵波速度决定了稳定条件的上限值。对于均匀介质, 当 $\alpha = V_p \Delta t / \Delta x < \sqrt{2/\pi}$ 时, 产生的误差可以忽略。在非均匀介质中, 当 $\alpha = V_{\max} \Delta t / \Delta x < 0.2$ (其中 V_{\max} 是格点中的最大波速) 时, 产生的误差可以忽略。值得注意的是, 在非均匀介质中, 稳定性条件使用的范围是材料的波速和密度变化不太大, 比如地质材料的波速和密度的变化在上述范围内。

2 算例及讨论

2.1 计算条件

本文采用如下源函数来模拟二维爆炸点源, 源函数的三个位移分量为:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_3, t) = g_1(x_1, x_3) f(t) \\ u_2(x_1, x_3, t) = 0 \\ u_3(x_1, x_3, t) = g_3(x_1, x_3) f(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$g_i(x_1, x_3) = (x_i - x_{is}) \exp\{-a[(x_1 - x_{1s})^2 + (x_3 - x_{3s})^2]\} \quad i = 1, 3$$

$$f(t) = (t - t_0) \exp\{-\alpha(t - t_0)^2\}$$

x_{is} 是点源的中心点坐标。取 $t_0 = 0.15s$, $\alpha = 1500$, $a = 0.1$, 空间步长为 $50m$, 时间步长为 $0.001s$ 。

计算空间结构如图 2 所示, 空间格点数取为 128×128 , 点源位置 $(64, 64)$, 在 $x_{1s} = x_{3s} = 64$, 在 $G_1 G'_1 (x_3 = 37)$ 及 $G_2 G'_2 (x_1 = 37)$ 线上记录波形图。本文采用的是文献 [6] 给出的无裂缝岩石的弹性常数, 见表 1。采用文献 [7] 中模型一来计算含裂缝岩石的弹性常数。选择裂缝平行排列, 其法向 $n = (1, 0, 0)^T$, 并且裂缝关于 n 轴对称。裂缝表面有圆币形的细小、孤立裂纹, 裂纹密度 0.1 , 裂纹半径 $5m$, 纵横比 0.0001 。裂缝是干裂缝, 空气的拉梅常数取为 $\lambda' = 0$, $\mu' = 0$, 利用文献 [7] 中的公式可计算得到本文所用的含裂缝岩石的弹性常数, 如表 1 所示。

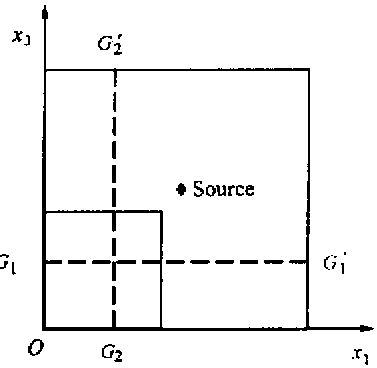


图 2 介质结构图(角上部分的坐标在 $G_1 G'_1 (x_3 = 37)$ 线上记录波形图(点源位置 $(64, 64)$))

Fig.2 Structure of media

表 1 岩石的材料常数(单位: GPa, 未列出的弹性常数为 0)

Tab.1 Elastic constants of rock

材 料	$c_{11} = c_{22}$	c_{33}	$c_{44} = c_{55}$	c_{66}	$c_{12} = c_{21}$	$c_{23} = c_{32}$	$c_{13} = c_{31}$
无裂缝岩石(各向同性)	87.464	87.464	29.161	29.161	29.142	29.142	29.142
含排列裂缝岩石(各向异性)	33.013	81.419	29.161	17.907	10.999	23.097	10.999

2.2 计算结果及讨论

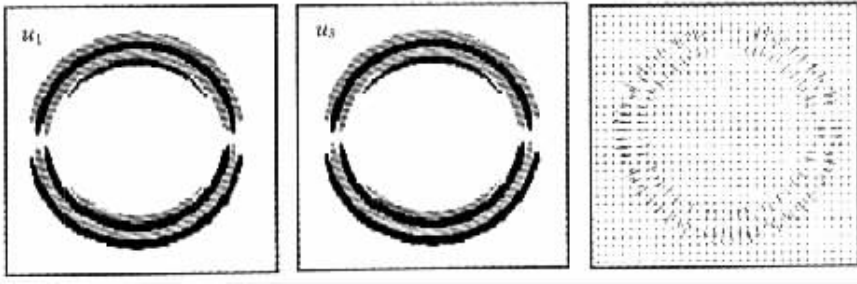
本文给出了弹性波在均匀无裂缝岩石(各向同性)和均匀含裂缝岩石(各向异性)和非均匀介质(角上是含平行排列裂缝岩石, 其他部分为无裂缝岩石)中传播的数值模拟结果。图 3、4、6 是二维瞬态图, 图 5、7 是选定空间位置的波形图。

2.2.1 弹性波在无裂缝岩石中传播

图 3 是爆炸点源产生的纯纵波在无裂缝岩石中传播过程中 $500ms$ 时刻的二维瞬态图以及相应的矢量图。由图可以看出, 各向同性介质中的波速与方向无关, 得到的波传播图像是一个圆。各个位移在某方向的缺口是由源函数造成的。

2.2.2 弹性波在各向异性均匀介质中传播

图 4 是爆炸点源产生的波在含均布平行裂缝干裂纹岩石中传播过程中 $500ms$ 时刻的二维瞬态图。

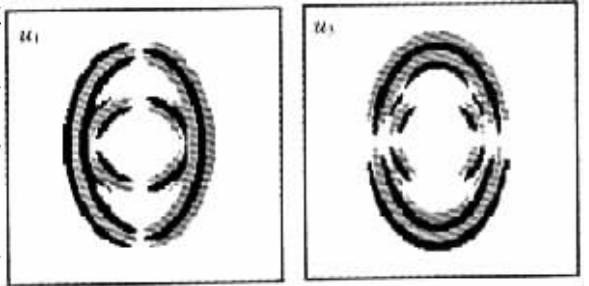


(a) 位移分量 u_1 (b) 位移分量 u_3 (c) 相应的矢量图 $u = iu_1 + ju_3$

图3 波在无裂缝岩石中传播的二维瞬态图和矢量图 (500ms)

Fig.3 Wave field snapshots and vector-graph for waves propagation in rock without fractures at 500ms

从图中看出，裂缝的存在使得介质表现出各向异性特征，波形发生了转换，两个位移分量上都产生了横波。与图3比较可以看出，裂缝法向上纵波波速下降，而垂直方向上，即裂纹排列方向上纵波波速几乎没有变化。图5是在两个指定位置 $G_1G'_1$ ($x_3 = 37$, 对应图(a) (b)) $G_2G'_2$ ($x_1 = 37$, 对应图(c) (d))处记录的波形图。图中明确表明，纵波有一部分转化成了横波；还可以观察到，在排列裂缝的法线方向传播的波散射明显，纵波和横波波速相差也较小。



(a) 位移分量 u_1 (b) 位移分量 u_3

图4 波在含均匀平行干裂缝的岩石中传播的二维瞬态图 (500ms)

Fig.4 Wave field snapshots for waves propagation in homogeneous rock with dry fractures at 500ms

2.2.3 弹性波在非均匀介质中传播

图6是波在非均匀介质（角上是含平行排列裂缝岩石，其他部分为无裂缝岩石）中传播的一系列时刻的二维瞬态图，这些图清楚地给出了由界面导致的散射波的发展。在界面上产生了反射波、透射波且发生了波形转换，并且由于裂缝的方向性排列在两个位移分量方向上产生的散射波不同。

图6的缺点是不能明确表示波形的转换，我们在图7中给出了选定位置 $G_1G'_1$ ($x_3 = 37$, 对应图(a) (b)) $G_2G'_2$ ($x_1 = 37$, 对应图(c) (d))处的波形迹线图。为了讨论方便，先定义符号如下：RP——反射纵波，RS——反射横波，TP——透射纵波，TS——透射横波。对于在 $G_1G'_1$ 上位移分量 u_3 ，没有RP波产生。对于在 $G_2G'_2$ 上的位移分量 u_1 ，没有RP波产生，只有RS波，并且TS、TP同时存在，可以看出TP的折射以及转换为TS波的幅度也相当大。对于在 $G_2G'_2$ 上的位移分量 u_1 ，也是只有RS波以及TS、TP波，并且TS、TP波发于同一点，说明了在界面处产生了次级TS、TP波，当其在各向异性介质中传播时不再发生波型的转换。

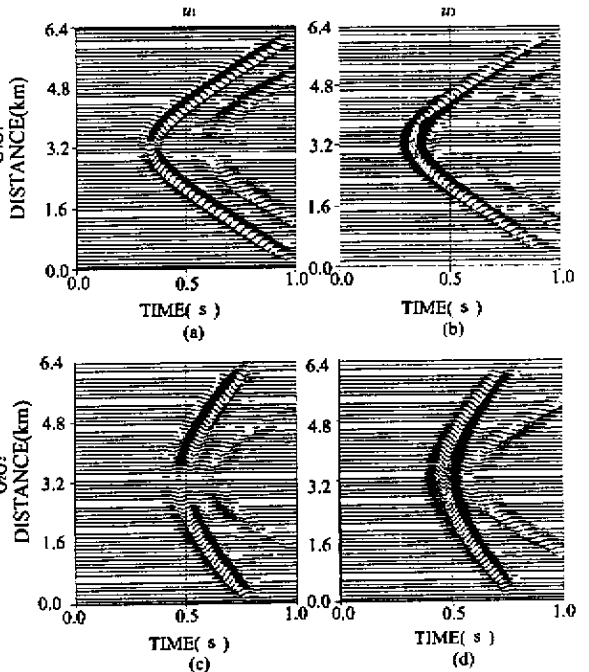


图5 波在含裂缝的岩石中传播波形图

Fig.5 Displacement time section for waves propagation in homogeneous rock with dry fractures

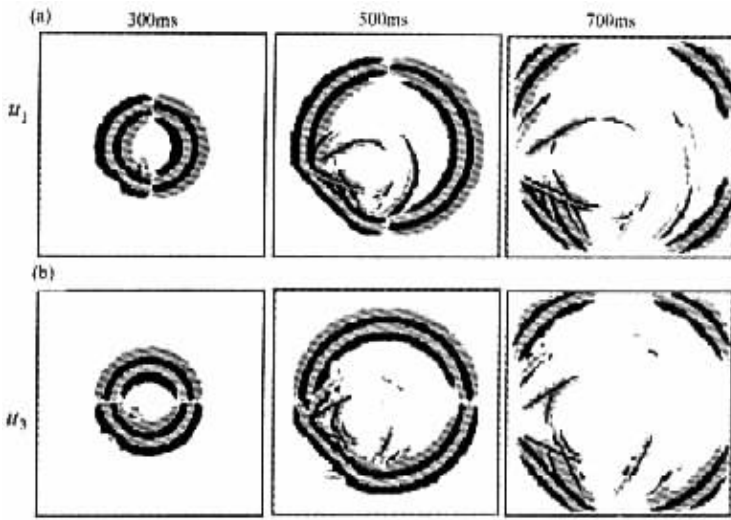


图6 波在非均匀介质中传播的二维瞬态图 (300ms, 500ms, 700ms)

Fig.6 Wave field snapshots for waves propagation in heterogeneous rock at 300ms, 500ms and 700ms

3 结论

(1) 具有方向性的排列裂缝的存在使介质呈各向异性, 使各向同性爆炸点源在裂纹岩石中产生了纵波和横波, 在裂缝的法线方向上波的衰减和散射效果比裂缝排列方向的效果明显。

(2) 介质中各向异性界面的存在使得在不同方向的界面上产生的 RP、RS 波不同。在垂直于裂缝法线方向的界面上产生了 RP、RS 以及 TP、TS, 并且透射波的散射程度较大; 在平行于裂缝法线方向的界面上没有反射纵波, 并且透射波的成分也比较简单, 散射程度也较小。

参考文献:

[1] Fornberg B. The Pseudospectral Method: Comparisons with Finite Differences for the Elastic Wave Equation [J]. Geophysics, 1987, 52 (4): 483-501.

[2] Fornberg B. The Pseudospectral Method: Accurate Representation of Interfaces in Elastic Wave Calculations [J]. Geophysics, 1988, 53 (5): 625-637.

[3] Huang B S. A program for Two-dimensional Seismic Wave Propagation by the Pseudospectrum Method [J]. Computers & Geosciences, 1992, 18 (213): 289-307.

[4] Daut C R, Braile L W, Nowack R L, Chiang C S. A Comparison of Finite-difference and Fourier Method Calculations of Synthetic Seismograms [J]. Bull. Seis. Soc. America, 1989, 79 (4): 1210-1230.

[5] Kosloff D, Reshef M, Loewenthal D. Elastic Wave Calculations by the Fourier Method [J]. Bull. Seis. Soc. America, 74 (3): 875-891.

[6] Crampin S. Effective Anisotropic Elastic Constants for Wave Propagation Through Cracked Solids [J]. Geophys. J. R. Soc., 1984, 76: 135-145.

[7] 曾新吾, 刘恩儒, 张光莹. 具有分布裂缝的岩石的弹性本构方程 [C]. 应用力学研究与实践, 刘人怀主编, 暨南大学出版社, 2000.7, 217-223.

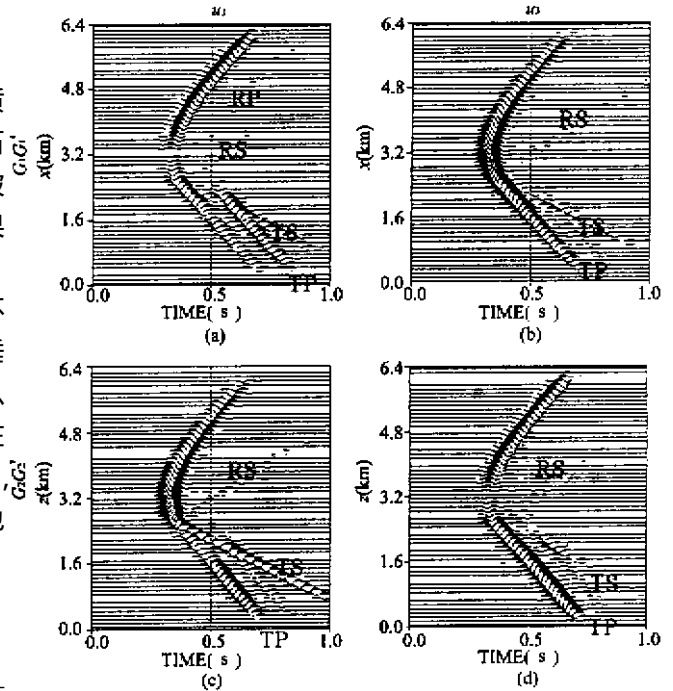


图7 波在非均匀介质中传播的波形图

Fig.7 Displacement time section for waves propagation in heterogeneous rock

