

文章编号: 1001-2486 (2002) 03-0040-05

# 一种基于耦合的三维拓扑结构表示方法\*

李军, 景宁, 孙茂印

(国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 基于一定的空间划分, 提出了一种基于耦合的三维拓扑结构表示方法。这种三维拓扑结构基于耦合 (oriented face, arc) 定义了四种基本的拓扑关系。基于这些基本的拓扑关系, 讨论了四种重要的拓扑查询的实现算法, 从而证明了这种拓扑结构的价值: 不依赖几何嵌入, 快速推导出各种拓扑关系, 尤其是与体对象相关的三维拓扑关系。

**关键词:** 三维拓扑结构; 三维地理信息系统; 耦合

**中图分类号:** TP392 **文献标识码:** A

## Representation of 3D Topological Structure Based on Couple

LI Jun, JING Ning, SUN Mao-yin

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** A representation method for 3D topological structure based on couple is proposed in a certain divided space. The structure defines four basic topological relationships on the couple (oriented face, arc). Through these basic relationships, the implementation algorithms for four important topological query are discussed. Thus it is shown that the 3D topological can deduce all kinds of topological relationships, especially topological relationships between 3D body objects, independent of geometry embedding.

**Key words:** 3D topological structure; 3D GIS; couple

拓扑结构表示的目标是: 以简单的拓扑数据结构为基础, 通过简单的计算和查询得到各种重要的拓扑信息。二维拓扑结构基于平面连通图能够描述拓扑关系<sup>[1]</sup>, 但在三维空间, 由于空间对象更加复杂, 每个体对象拥有多个面, 每个面又由多个弧段构成, 许多拓扑关系无法进行表示, 目前还没有比较通用的三维拓扑结构。

Molenaar 提出了一种三维拓扑空间数据模型 3DFDS<sup>[2]</sup>, 通过三维对象的边界关系构建三维拓扑模型, 但是该模型表达的拓扑关系有限, 不利于表示复杂的三维空间实体, 尤其是难以表示体对象之间的拓扑关系。Losa 提出了一种三维拓扑结构<sup>[3]</sup>, 通过定义耦合 (couple) (face, oriented arc) 和三种基本的拓扑关系, 可以推导出面的边界、共享弧段的面等一些面和弧段的拓扑关系。但是, 其拓扑结构以有向弧段为基础, 根据基本定义推导出的拓扑关系有限, 拓扑结构不完备, 无法得到和体对象相关的各种拓扑信息。

目前的三维拓扑结构主要描述体对象本身的点、线、面的拓扑关系, 而无法表示体对象间的拓扑关系。本文以三维 GIS (地理信息系统) 为应用背景, 在二维拓扑结构 DCEL<sup>[4]</sup>的基础上, 基于耦合 (oriented face, arc) 定义了几种基本的拓扑关系, 提出了一种三维空间拓扑结构。这种拓扑结构可以不依赖于几何嵌入, 快速推导出各种拓扑关系, 尤其是与体对象相关的三维拓扑关系。

### 1 DCEL 表示<sup>[4]</sup>

DCEL 是 GIS 中常用的拓扑结构表示方法, 提供了基于平面连通图的完备的拓扑表示。如图 1 所

\* 收稿日期: 2001-12-07

基金项目: 国家 863 高技术资助项目 (863-306-ZD09-02-4)

作者简介: 李军 (1973—), 男, 讲师, 博士。

示,该拓扑结构以有向弧段为基础,表示各个弧段的左邻面(left face)、右邻面(right face)、始点(begin node)、终点(end node)、前弧段(previous arc)、后弧段(next arc)。每个弧段都有惟一的前弧段和后弧段:设有向弧段  $a$ ,以其终点为中心,沿逆时针方向得到的第一个弧段为其后弧段;以其始点为中心,沿逆时针方向得到的第一个弧段为其前弧段。

这种拓扑结构表示的优点在于:可以容易地计算出围绕一个结点的弧段序列和围绕一个面的弧段序列,这两种信息是许多其他复杂的拓扑信息计算的基础。

## 2 三维拓扑结构的要求

有向弧段是二维拓扑表示的基础,二维平面连通图中有向弧段具有以下特点:

- 每个弧段只具有两个结点和两个相邻的面;
- 围绕结点的弧段以顺时针或逆时针方向可以进行排序。

从二维拓扑结构中可以推断出:三维体对象的拓扑关系(如相邻关系)需要以围绕体对象的有向面为基础。但是三维空间中,每个体对象含有多个面,每个面又含有多个弧段,导致多个面无法以空间方向为基础得到固定的序列表示。

基本的三维拓扑数据结构应具有以下特点:

- (1) 考虑面的方向性;
- (2) 形成面之间的关联,可以遍历体对象的表面;
- (3) 拓扑结构必须是完备的;
- (4) 拓扑结构必须具有最少的冗余度。

## 3 基本的三维拓扑关系定义

在三维空间中,点、弧段、面、体等数据类型,分别定义为0维、1维、2维和3维对象。三维拓扑结构的表示必须基于一定的空间划分,故定义以下的空间划分规则:

- 规则1:两个  $n$  维对象有且只有一个  $(n-1)$  维的对象  $(n = 1, 2, 3)$  作为边界;
- 规则2:外部空间作为一个体对象;
- 规则3:同维数对象  $(0, 1, 2, 3$  维)互不重叠;

这些规则意味着将三维空间划分成类似于二维空间中的平面连通图,同等维数的对象之间只存在相遇(meet)或相离(disconnect)拓扑关系。

在这种空间划分的基础上,将有向面扩展成一个耦合(oriented face, arc)。基于以下两个原因,采用耦合作为基本的拓扑表示要素,它能够惟一确定与其具有某种拓扑关系的耦合。

· 每个面可能属于多个体对象,面具有多个相邻面。在表示面的相邻面时必须考虑到两个面相交的弧段,才能确定其相邻面。

· 每个弧段可能属于多个面,在每个结点上有多个分属于不同面的弧段相交。在表示弧段的相邻弧段时必须考虑其所属的面才能确定相邻弧段。

以耦合(oriented face, arc)为基础,我们定义四种基本的拓扑关系,类似于DCEL算法中的 Previous Arc、Next Arc。以图2为例说明这些基本拓扑关系的定义。图2中,面  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  相交于弧段  $a$ ,方向矢量分别

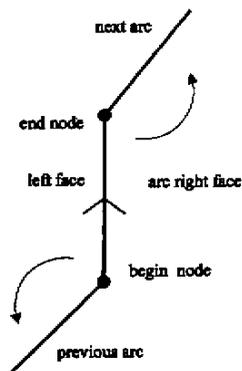


图1 DCEL 结构表示  
Fig.1 Topological structure of DCEL

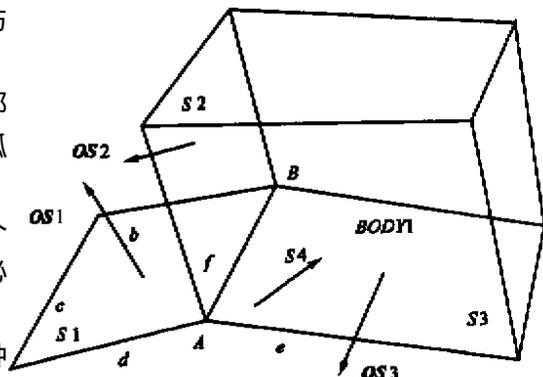


图2 三维拓扑关系表示  
Fig.2 3D topological representation

为  $OS_1$ 、 $OS_2$ 、 $OS_3$ 。矢量绕弧段旋转得到面定义为沿矢量方向，作一紧密围绕弧段的有向圆弧，以矢量所表示面为起点，沿圆弧方向与该圆弧相交的面即为旋转所得面。对于每个耦合 (oriented face, arc)，定义四种拓扑关系如下：

(1) 具有公共弧段的下一个耦合 (Next Couple with Arc, NCA)。对于耦合  $(S_1, a)$ ，面  $S_1$  的方向矢量  $OS_1$  绕弧段  $a$  旋转得到面  $S_2$ ， $S_2$  与弧段  $a$  扩展成一个新的耦合，即  $NCA(S_1, a) = (S_2, a)$ 。

(2) 具有公共弧段的前一个耦合 (Previous Couple with Arc, PCA)。对于耦合  $(S_1, a)$ ，面  $S_1$  的方向矢量  $OS_1$  反方向绕弧段  $a$  旋转得到面  $S_3$ ， $S_3$  与弧段  $a$  扩展成一个新的耦合，即  $PCA(S_1, a) = (S_3, a)$ 。

(3) 具有公共面的下一个耦合 (Next Couple with Face, NCF)。对于耦合  $(S_1, a)$ ，规定面  $S_1$  中弧段  $a$  的方向根据有向面  $S_1$  的方向矢量由右手规则确定，弧段  $a$  沿其方向得到的面  $S_1$  的下一个弧段  $b$  扩展成一个新的耦合，即  $NCF(S_1, a) = (S_1, b)$ 。

(4) 具有公共面的前一个耦合 (Previous Couple with Face, PCF)。对于耦合  $(S_1, a)$ ，规定面  $S_1$  的弧段  $a$  的方向根据有向面  $S_1$  的方向矢量由右手规则确定，弧段  $a$  沿其反方向得到的面  $S_1$  的下一个弧段  $d$  扩展成一个新的耦合，即  $PCF(S_1, a) = (S_1, d)$ 。

同时，根据面的方向性，定义面的内部体 (In-Volume) 和外部体 (Out-Volume)，面的方向矢量指向的体对象为外部体，而其反方向指向的体对象为内部体。这类似于 DCEL 结构中的左邻面和右邻面，从而可以推导出体对象的相邻拓扑关系。

## 4 几种基本的三维拓扑关系的运算

根据定义的四种基本拓扑关系，可以不依赖于几何嵌入，直接快速地推导出一些重要的三维拓扑关系，实现三维 GIS 中的拓扑查询。

在推导拓扑关系时，需要首先查询数据库，得到满足要求的耦合，再根据定义的四种基本拓扑关系推导出其他所有满足条件的耦合。在下面介绍的几种拓扑关系运算中，有序序列是指围绕某弧段或某结点呈逆时针或顺时针排列的序列，它具有拓扑不变性。

### (1) 面的边界弧段的封闭的有序序列

以已知的面的一条边界弧段为起点，根据 NCF 或 PCF 拓扑关系，可以直接推导出围绕面的其他相邻弧段，从而形成面的边界弧段的封闭有序序列。

如图 2 所示，已知  $a$  为面  $S_1$  的边界弧，则

$$NCF((S_1, a)) = (S_1, b), \dots, NCF((S_1, d)) = (S_1, a);$$

从而得到围绕面  $S_1$  的所有弧段的封闭的有序序列： $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 。

### (2) 拥有公共弧段的面的封闭的有序序列

设  $S$  为包含弧段  $a$  的面，面  $S$  中弧段  $a$  的方向以面的方向矢量为基础根据右手定则确定。由于不同的面可能包含同一弧段，同一弧段在不同的面中可能具有不同的方向。由于数据库中的弧段数据没有方向性，根据函数  $\text{Begin-Node}(\text{couple})$  获取弧段  $a$  的始点，就能得到面  $S$  中弧段  $a$  的方向。

```
node Begin-Node ((S, a)) {
    (S, a') = PCF(S, a);
    find the same node N existed in the two arc a and a';
    return N; }
```

假设已知面  $S$  包含某弧段  $a$ ，则以耦合  $(S, a)$  为起点，根据函数  $\text{new-couple1}(\text{couple})$  的迭代运算，可以依次得到新的耦合，从而形成包含该弧段的面的封闭的有序序列。

```
couple new-couple1 (couple) {
    if (Begin-Node (couple) == Begin-Node ((S, a))
        new-couple = NCA (couple);
    else
```

```

new-couple = PCA ( couple );
return new-couple ; };
```

在函数 `new-couple1` 中，以耦合 `couple` 中弧段  $a$  的方向为依据，判断面是否与起始面  $S$  围绕弧段  $a$  的方向一致，然后根据拓扑关系 `PCA` 或 `NCA` 推导沿起始面  $S$  围绕弧段  $a$  的方向包含弧段  $a$  的下一个面，并返回新的耦合。通过函数 `new-couple1` 的不断迭代，直至得到起始耦合，从而得到一个围绕公共弧段的面的封闭的有序序列。

以图 2 为例，若已知  $S_1$  为包含弧段  $a$  的面，则根据以下推导：

```

NCA ( S1 , a ) = ( S2 , a );( Begin-Node( S1 , a ) = Begin-Node( S1 , a ))
PCA ( S2 , a ) = ( S3 , a );( Begin-Node( S2 , a ) != Begin-Node( S1 , a ))
NCA ( S3 , a ) = ( S1 , a );( Begin-Node( S3 , a ) = Begin-Node( S1 , a ))
```

可以得到围绕弧段  $a$  的所有面的封闭的有序序列： $S_1, S_2, S_3$ 。

### (3) 体对象内拥有公共结点的面的封闭的有序序列

在一个体对象内，许多边界面拥有公共的结点，这些面以该结点为中心根据顺时针或逆时针方向形成一个封闭的面的序列。

假设体对象  $K$  中，已知面  $S$ ，其边界弧段  $a$  包含顶点  $N$ ，则根据函数 `new-couple2 ( couple )` 可以迭代推导体对象  $K$  中以  $N$  为顶点的所有面，并形成以结点  $N$  为中心的封闭的有序序列。

```

couple new-couple2 ( ( S , a ) ) {
    if( In-Volume ( S ) == K )
        ( S' , a ) = PCA ( ( S , a ) );
    else( S' , a ) = NCA ( ( S , a ) );
    ( S' , a' ) = PCF ( ( S' , a ) );
    if( a' don't include node N )
        ( S' , a' ) = NCF ( ( S' , a ) );
    return ( S' , a' ); };
```

在函数 `new-couple2` 中，该函数首先以面  $S$  的方向为依据，通过拓扑关系 `PCA` 或 `NCA` 推导共享弧段  $a$  的面  $S'$ ，该面必然是体对象  $K$  的表面。然后，根据拓扑关系 `PCF` 或 `NCF` 推导面  $S'$  中拥有公共结点的弧段  $a'$ ，并返回耦合 `( S' , a' )`。通过函数 `new-couple2` 的不断迭代，直至得到起始耦合，从而得到一个体对象内所有以结点为中心的封闭的面的有序序列。

以图 2 为例，若已知  $S_2$  为体对象  $BODY_1$  中包含结点  $A$  的面，其中弧段  $a$  包含结点  $A$ ，则根据以下推导：

```

new-couple2 ( S2 , a ) = ( S3 , e );( In-Volume ( S2 ) = BODY1 )
new-couple2 ( S3 , e ) = ( S4 , f );( In-Volume ( S3 ) = BODY1 )
new-couple2 ( S4 , f ) = ( S2 , a );( In-Volume ( S4 ) != BODY1 )
```

可以得到体对象  $BODY_1$  内所有以结点  $A$  为中心的封闭的面的有序序列： $S_2, S_3, S_4$ 。

### (4) 体对象的表面

对于不规则的三维体对象（每个面具有任意数目的顶点）的表面，无法产生一种能够完全遍历而不重复的路径。例如，在图论中著名的哈密顿图回路问题<sup>[5]</sup>。

因此，对于不规则的三维体对象的表面，无法形成一个体对象的表面序列。但是，我们仍然对基于拓扑结构的表面的推导进行研究，通过一些基本的拓扑关系，迭代推导出体对象的表面，形成一种惟一的表面序列。这种迭代推导能够遍历体对象的表面，从而可以推导出与体对象相关的其他各种拓扑关系，从一个方面证明了这种拓扑结构的完备性。

假设已知面  $S$  是体对象  $BODY$  的一个表面，弧段  $a$  是面  $S$  的一个边界弧段，则可以以耦合 `( S , a )` 为起点，根据函数 `new-couple3 ( couple )` 的迭代运算，求得所有的表面。

```

couple new-couple3 ( ( S , a ) ) {
```

```

if( In-Volume ( S ) == BODY )
    ( S' , a ) = PCA ( ( S , a ) );
else( S' , a ) = NCA ( ( S , a ) );
coupletemp = next-not-used-couple ( S' , a );
if( coupletemp != NULL )
    ( S' , a' ) = coupletemp ;
else( S' , a' ) = NCF ( S , a );
if( !( ( S' , a' ) in ListExistedCouple ) )
    add ( S' , a' ) to ListExistedCouple ;
return ( S2 , a2 ); };
couple next-not-used-couple ( S , a ) {
    ( S , tempa ) = NCF ( ( S , a ) )
while ( ( S , tempa ) in ListExistedCouple ) {
    if ( ( S , tempa ) != ( S , a ) ) then
        ( S , tempa ) := NCF ( ( S , tempa ) )
    else return NULL ; };
return ( S , tempa ); };

```

在函数 new-couple3 中, 用 ListExistedCouple 集合存储已经访问过的耦合, 根据原耦合得到共享弧段的相邻体对象表面, 再得到该表面内没有访问过的弧段, 从而组成新的耦合。如果该新表面内的所有弧段都已访问, 则表示与该弧段相邻的表面都曾经访问, 求出与原表面共享另一弧段的表面, 根据其表面内的没有访问过的弧段获得新的耦合。递推下去, 从 ListExistedCouple 中可得到体对象的表面。

为了减少计算复杂度, 函数 new-couple3 的循环计算在出现某个表面的体对象内的所有相邻面组成的耦合都被访问过而停止。我们目前无法在理论上证明所有的体对象的表面都已被遍历。如果需要完全保证表面的遍历, 则需要从集合 ListExistedCouple 中重新寻找新的起始耦合, 进行函数 new-couple3 的循环计算。

## 5 小结

这种三维空间拓扑结构通过几种基本拓扑关系 (NCA、PCA、NCF、PCF) 的定义, 能够推导出许多重要的拓扑关系, 包括: 面的边界弧段的封闭的有序序列、拥有公共弧段的面的封闭的有序序列、体对象内拥有公共结点的面的封闭的有序序列、体对象的表面等。因此, 根据这种三维拓扑结构, 更多的拓扑关系能够较容易地直接推导出来, 尤其是与体对象相关的拓扑关系。

四种拓扑关系的建立需要很大的工作量, 增加了数据的存储和维护的复杂性。在四种定义的基本拓扑关系中, PCF 的存在具有某种程度的冗余, 对于大多数拓扑关系而言, 可以省去 PCF 的定义, 这样将降低建立拓扑关系的工作量, 而只是对于少数特殊的拓扑关系需要花费较多的计算时间。

## 参考文献:

- [1] Kreveld M V, Nievergelt J, Roos T, Widmayer P. Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems [M]. Germany: Springer-Verlag, 1997.
- [2] Molenaar M. An Introduction to the Theory of Spatial Object Modelling for GIS [M]. Taylor & Francis, 1998.
- [3] Losa A D E, Cervelle B. 3D Topological Modeling and Visualization for 3D GIS [J]. Computers & Graphics, 1999, 23: 469-478.
- [4] Muller D E, Preparata F P. Finding the Intersection of Two Convex Polyhedra [J]. Theoretical Computer Science, 1978, 7(2): 217-236.
- [5] 兰家隆, 刘军. 应用图论及算法 [M]. 成都: 成都电子科技大学出版社, 1995.

