

文章编号: 1001-2486 (2002) 03-0098-05

多群体合作型协进化方法的数学建模及分析*

薛宏涛, 沈林成, 常文森

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要:采用传统单群体 GA 中模式复制方程的分析方法,对一种多群体合作型协进化方法建模并进行数学分析,对于目前尚未解决的协进化过程中的关键问题,包括个体适应度的评价方法、群体间合作的回报信贷分配以及由此影响到群体中个体的增长规律等在理论方面进行分析。最后表明,数学建模与分析的结果与 Potter 的实验结论相吻合。

关键词:协进化;合作型协进化方法;模式复制方程;数学模型

中图分类号:TP301.6 **文献标识码:**A

Mathematical Modeling and Analysis for a Multi-population Cooperative Co-evolution Method

XUE Hong-tao, SHEN Lin-cheng, CHANG Wen-sen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Make a mathematical model for a multi-population cooperative co-evolution method and analyze it, using the idea of pattern replicator equation in one population genetic algorithm. For some unsolved key problems in co-evolution, such as the evaluation method for the individual, credit assignment for the cooperation among populations and the resulting individual law increase in population, analyze them theoretically. Finally, show that the result of the mathematical analysis is consistent with Potter's experiment result.

Key words: co-evolution; cooperative co-evolution method; pattern replicator equation; mathematical model

为了克服传统进化算法的不足,解决一类更为广泛的机器学习、共同适应以及多智能体间的协调问题^[1],人们模仿自然界中多个物种之间协同进化的机制,提出了协进化计算的思想^[2]。目前对于协进化算法的研究主要集中在根据群体中个体间交互方式设计和实现不同的协进化方法并评估它们的效率等方面,对协进化方法的理论分析较少,尤其是对协进化过程中的关键问题,如个体适应度的评价方法、群体合作或竞争的回报信贷分配以及由此影响到群体中个体的增长规律等方面。本文将采用在传统单群体 GA 中模式复制方程的分析方法,对一种多群体合作型协进化算法建模并进行数学分析,最后表明,数学建模与分析的结果与 Potter 进行的实验结论相吻合。

1 多群体合作型协进化方法

多群体合作型协进化算法中存在多个进化群体^[3],每个群体都按照传统 GA 进化,整个协进化方法的结构流程与传统单群体 GA 算法相似,如图 1 所示。

该方法的关键在于在对个体进行适应度评价时,加入对群体间交互协调的处理。对那些有利于群体间协调的个体赋予较高的适应度,而不利的则赋予较低的适应度,这样各个群体就会向着有利于相互协调适应的方向进化,从而产生协调行为。具体的处理方法如图 2 所示。

* 收稿日期: 2001-12-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60085005); 国家部委跨行业项目基金资助项目(99J16.5.1.KG0139); 湖南省自然科学基金资助项目(00JJY2062)

作者简介: 薛宏涛(1973—),男,博士生。

```

gen = 0 ;
对于每个群体 S, 进行如下操作 :
    对群体进行随机初始化操作 ;
    计算初始群体中每个个体的适应度 ;
    结束
直到满足终止条件之前, 进行如下操作 :
    gen = gen + 1 ;
    对每个群体 S, 进行如下操作 :
        基于适应度值从上一代群体中选取新一代群体 ;
        将遗传算子 (交叉、变异) 应用到群体的个体中 ;
        对群体的每个个体, 评价其适应度 ;
        结束

```

图 1 多群体合作型协进化方法

Fig.1 Multi-population cooperative co-evolution method

```

从其他群体中选择代表个体 ;
对于群体 S 中的每个需要评价的个体 i, 进行如下操作 :
    将个体 i 与从其他群体中选出的代表个体组合形成协作行为 ;
    通过将这种协作行为应用到目标问题而评价其适应度 ;
    对个体 i 赋予协作的适应度 ;

```

图 2 个体适应度的评价方法

Fig.2 Evaluation method of individual fitness

2 单群体 GA 的模式复制方程

如果将群体中每种不同类型的个体对应着不同的信息模式, 那么对信息模式增长变化规律的探讨就能体现群体进化的规律。在研究模式的增长变化规律时, 可以先不考虑交叉、变异算子, 只考虑复制算子对于群体中的各个信息模式增长变化的影响情况, 这就得到模式复制方程^[4]。在后面可以看到, 著名的模式定理可以视为模式复制方程在考虑了交叉的变异算子时的特殊情况。

为了便于分析, 不妨对群体进行如下假定:

- (1) 假定群体中有 n 种信息模式, 设为 $I_i, i \in [1, n]$;
- (2) 群体中每种信息模式 I_i 的个数数目为 $x_i, x_i \geq 0$;
- (3) 信息模式 I_i 在群体中所占的比例为 $p_i, 0 \leq p_i \leq 1$, 这里,

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} \Rightarrow x_i = p_i \sum_{j=1}^n x_j \quad (1)$$

- (4) 信息模式 I_i 的相对增长率为 λ_i , 这里,

$$\lambda_i = \frac{x_i(t+1)}{x_i(t)} \Rightarrow x_i(t+1) = \lambda_i x_i(t) \quad (2)$$

(2) 式即为单群体 GA 信息模式的模式复制方程。

将 (1) 式代入 (2) 式, 并累加, 可得:

$$\sum_{i=1}^n x_i(t+1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i(t) \sum_{j=1}^n x_j(t) \quad (3)$$

结合 (1) (3) 两式, 可得:

$$p_i(t+1) = \frac{x_i(t+1)}{\sum_{j=1}^n x_j(t+1)} = \frac{\lambda_i x_i(t)}{\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(t) \sum_{k=1}^n x_k(t)} = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(t)} \cdot \frac{x_i(t)}{\sum_{k=1}^n x_k(t)}$$

因此，

$$p_i(t+1) = \frac{\lambda_i p_i(t)}{\sum_{j=1}^n \lambda_j p_j(t)} \quad (4)$$

这就是单个群体中信息模式 I_i 所占比例 p_i 的增长公式。在这里，模式的相对增长率 λ_i 实际上就相当于该模式的适应度。

考虑了交叉和变异因素的模式定理如下式：

$$x_i(t+1) \geq x_i(t) \frac{f(I_i)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(I_i)}{l-1} - \alpha(I_i) p_m \right) \quad (5)$$

其中， l 是模式串的长度， $o(I_i)$ 是模式 I_i 中的固定位数， $\delta(I_i)$ 是模式 I_i 的定义长度， p_c 是交叉规律， p_m 是变异概率， $f(I_i)$ 是模式 I_i 的适应度， \bar{f} 是整个群体的平均适应度，并且：

$$\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f(I_i)}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

对比(2)式可见，模式定理可以视为考虑了交叉和变异算子时模式复制方程的特殊形式，此时，

$$\lambda_i = \alpha \cdot \frac{f(I_i)}{\bar{f}} \left(1 - p_c \frac{\delta(I_i)}{l-1} - o(I_i) p_m \right) \quad (\alpha \geq 1) \quad (6)$$

3 多群体合作型协进化方法的建模及分析

在多群体合作型协进化方法中，对个体适应度进行评估时，需要从其他群体中选出代表个体，与要评估的个体组成合作行为应用于目标领域，根据完成目标的表现情况进行适应度评估。这样有两个问题必须重点考虑，第一是对合作行为评估的建模，假定每种合作行为的评估情况为一个给定的表现值。以两个群体协进化为例，可以定义两个群体中所有个体相互组合得到合作行为的评估表现值为一个矩阵，称为交互回报矩阵，矩阵中的每个元素 a_{ij} 是群体 A 中个体 I_i 与群体 B 中个体 J_j 组合成合作行为应用到目标领域所得的回报。第二是代表个体的选择问题，代表个体的选择有多种方法，根据问题领域的不同也可以采用不同的方法，最具有代表性的方法是随机选择法和最优选择法，即从其他群体中随机选取一个代表个体或选择当前适应度最好的个体作为代表个体。

下面以两个群体的合作型协进化方法为例进行分析，对于三个以上群体的情况，可以类似分析。假定两个进行协进化的群体分别为 A 、 B ，群体 A 中有 m 种信息模式，设为 I_1, I_2, \dots, I_m ，每种信息模式的个体数目为 x_1, x_2, \dots, x_m ，各自所占比例为 p_1, p_2, \dots, p_m ，各自的相对增长率为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ；群体 B 中有 n 种信息模式，分别设为 J_1, J_2, \dots, J_n ，每种信息模式的个体数目为 y_1, y_2, \dots, y_n ，各自所占比例为 q_1, q_2, \dots, q_n ，各自的相对增长率为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 。如前所述，我们将群体 A 与群体 B 中个体组合配对的交互回报矩阵定义为 $\{a_{ij}\}^{m \times n}$ ，矩阵中的每个元素 a_{ij} 即为群体 A 中的信息模式 I_i 与群体 B 中信息模式 J_j 组合配对的适应度回报值。下面就分别考虑按照随机选择法和最优选择法选取代表个体时对合作型协进化方法进行分析。

3.1 随机选择法

如果按照随机选择法评估群体 A 中的信息模式 I_i ，那么要在群体 B 中随机选出一个代表个体 J_j 来与之配对，由于 J_j 在 B 中所占的比例为 $q_j(t)$ ，如果按照随机法选择，则它被选中的概率为 $q_j(t)$ ，由于 I_i 与 J_j 相配对的适应度回报值为 a_{ij} ，群体 B 中的每种模式都可能被选中，综合起来就得到 I_i 的适应度值为：

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t) \quad (7)$$

将(7)式代入群体 A 中信息模式 I_i 所占比例增长公式(4)中，即得：

$$\begin{aligned}
 p_i(t+1) &= p_i(t) \cdot \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^m \lambda_k p_k(t)} = p_i(t) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t)}{\sum_{k=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{kj} q_j(t)) p_k(t)} \\
 &= p_i(t) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t)}{\sum_{k=1, m} \sum_{j=1, n} a_{kj} p_k(t) q_j(t)} = p_i(t) \cdot \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t)}{pAq^T}
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, p = [p_1, p_2, \dots, p_m], q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$$

这里, $pAq^T = \sum_{i=1, m} \sum_{j=1, n} a_{ij} p_i(t) q_j(t)$ 是两个群体 A 与 B 的平均回报, 可见, 信息模式的增长率与配

对回报 a_{ij} 和相应的配对模式所占比例 $q_j(t)$ 直接相关, 配对回报越大, 配对模式所占比例越大, $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t)$ 越大, 则两种信息模式的配对成功概率就越大; 相应地, 该信息模式的适应度也就越大, 具体表现为在下一代中所占的比例就越大。

3.2 最优选择法

如果按照最优选择法选取当前适应度最好的个体与要评估的个体配对, 那么就寻找适应度最好的信息模式, 而适应度最好的信息模式就对应着在两个群体的交互回报矩阵中的与所要评估模式 I_i 相配对信息模式之中的最优回报表现值, 即 $\lambda_i = \max_{j=1, n} \{a_{ij}\}$ (9)

把(9)式代入(4)式即得群体 A 中信息模式 I_i 所占比例的增长公式:

$$p_i(t+1) = \frac{\lambda_i p_i(t)}{\sum_{k=1}^m \lambda_k p_k(t)} = p_i(t) \cdot \frac{\max_{j=1, n} \{a_{ij}\}}{\sum_{k=1}^m \max_{j=1, n} \{a_{kj}\} p_k(t)} \quad (10)$$

由此可见, 模式 I_i 的增长只与最好的配对回报 $\max_{j=1, n} \{a_{ij}\}$ 有关, 与相配对的模式所占的比例 ($q_j(t)$) 无关。因此, 不管配对模式 J_j 所占的比例是否很小, 只要能够与友群中的个体进行配对并取得好的配对回报, 就能促使群体 A 中的相应模式快速增长, 这就更加有利于群体中少量存在的优秀信息模式来发挥它们的作用。

3.3 分析

对随机选择法, 模式 I_i 的增长不仅与模式合作的配对回报有关, 并且相应的配对模式所占比例应该是多数的。当只有少量优秀模式时, 尽管其配对回报较高, 但由于模式所占比例较低, 就会淹没少量优秀模式的表现, 不能发挥其作用。因此, 在优秀模式尚处于较少的情况时, 就不适用这种方法。

对最优选择法, 尽管能够充分发挥少量优秀模式的作用, 但是当群体中优秀模式占了多数时, 就不能发挥其优势, 反而会将评估最优模式所需的计算量劣势表现出来。因此, 当优秀模式基本上已经占据群体的大部分时, 此方法的效率也就没有明显的优势了。

随机选择法既能发挥优秀模式的作用, 又能照顾到占群体较多比例的较差模式, 即 a_{ij} 较小但 q_j 较大时, 同样可以使得 $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j(t)$ 较大而能够成功配对, 这样就能充分利用群体的多样性信息。而最优选择法则完全忽略了较差模式, 因为它每次都是选取适应度最好的优秀模式, 即 $\max_{j=1, n} \{a_{ij}\}$ 所对应的模式 J 。然而, 在一些问题领域中, 群体间存在比较强的交联, 这时往往较差模式也能起到比较重要的作用。在这种情况下, 如果只采用最优法, 可能会由于较差模式起到重要作用被忽略而导致收敛过慢, 甚至不如传统 GA 的效率。此时, 就应该把两种方法结合起来使用, 发挥两者各自优势, 弥补各自不足。具体方法是评估个体的适应度时, 分别采取随机法和最优法得到适应度评估值, 然后取这两者中较好值作为最后的适应度评估值。这样做虽然增加了一部分计算量, 但是能够保证整个协进化的总体效率。

4 实验验证

根据 Potter 的实验结果,多群体合作型协进化方法对于典型的多元函数优化问题都能得到优于传统 GA 的效率,如 Rastrigin, Schwefel, Griewangk 和 Ackley 函数^[2],这些函数的一个共同特点是多元函数的各个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 之间不存在交联关系或者交联关系比较弱。但是对于合作型协进化的多个群体之间存在较强交联的情况下,此方法所得的结果就很差,甚至不如传统 GA。这是由于各个群体的相关信息模式之间的交联,致使最优选择法不能全面反应这种交联关系,从而造成合作型协进化效率低下。如果将这两种方法结合起来,按照上一部分提到的改进法,则能够得到比较好的结果。

比如对于著名的 Rosenbrock 函数: $f(x) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$,按照前述的协进化算法,选择两个进化群体 A 与 B,群体 A 中的每个个体对应于变量 x_1 的不同取值,群体 B 中的每个个体对应于变量 x_2 的不同取值,而适应度回报矩阵中的每个元素 a_{ij} 则对应于变量 x_1 和 x_2 取相应值时的函数取值 $f(x_1, x_2)$, 即:

$$a_{ij} = f(x_1, x_2)$$

该函数在 $x_1 = x_2 = 1$ 时取全局最小值为 0。图 3 中曲线是最优值(函数最小值)与评估次数的函数,实验中进行了 10000 次评估。由于它基本上沿着抛物线 $x_1^2 = x_2$ 达到全局最小的特征,两个自变量 x_1 和 x_2 之间存在较强的交联,因此造成合作型协进化方法效率还不如传统 GA,如果采用改进的混合型协进化方法,则能够得到明显的改善。图中改进的混合型协进化方法存在的小尖峰是由那些非交联的信息模式(即不满足 $x_1^2 = x_2$ 的信息模式)所造成的。

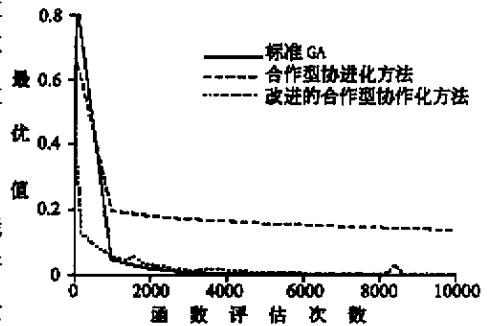


图 3 协进化方法对 Rosenbrock 函数的效率比较
Fig.3 Performance comparison of co-evolution method for Rosenbrock function

5 结论

本文采用单群体遗传算法中模式复制方程的推理分析方法,建立了多群体合作型协进化方法的数学模型,对协进化过程中的关键问题,包括个体适应度评价方法、群体间合作的回报信贷分配以及由此影响到群体中个体的增长规律等问题进行了分析,建立了合作型协进化过程中随机选取法和最优选取法的数学模型,并分析比较了它们的优缺点。本文在理论上对协进化方法的分析可以更好地指导协进化算法的设计与实现。

参考文献:

- [1] J Paredis. Co-evolutionary Computation [J]. Artificial Life, 2(4), (1995), 355-375.
- [2] Potter Mitchell A, Kenneth A, De Jong. A Cooperative Co-evolutionary Approach to Function Optimization [A]. In Proceedings of the Third Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Springer-Verlag, 1994, 249-257.
- [3] Potter Mitchell A. The Design and Analysis of a Computational Model of Cooperative Co-evolution [D]. PhD thesis, George Mason University, 1997.
- [4] Darwin Paul J. Co-evolutionary Learning by Automatic Modularisation with Speciation [D]. PhD thesis, University of New South Wales, 1996.
- [5] 薛宏涛, 冯庆堂, 沈林成, 常文森. 多 Agent 系统的一个研究平台: 基于 SoccerServer 的机器人足球赛仿真系统 [J]. 计算机应用研究, 1999.
- [6] 薛宏涛, 沈林成, 常文森. PTS 领域中的 Agent 体系结构设计与实现 [J]. 计算机工程与应用, 2000.
- [7] 薛宏涛, 叶媛媛, 沈林成, 常文森. 多智能体系统体系结构及协调机制研究综述 [J]. 机器人, 2001.
- [8] 薛宏涛, 沈林成, 朱华勇, 常文森. 基于进化的多智能体系统仿真框架及其面向对象设计与实现 [J]. 机器人, 2001.
- [9] 薛宏涛, 沈林成, 常文森. 基于进化的多智能体系统体系结构及仿真框架 [J]. 系统仿真学报, 2002.

