

文章编号: 1001-2486(2002)04-0016-04

## 基于球坐标变换的双星编队伪距相对定位\*

杏建军, 郗晓宁, 王 威, 韩 龙

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对 NASA 的 ST-3 中自主编队飞行(AFF)的双星星座, 讨论利用星载的类 GPS 高精度的伪距观测数据确定星座之间相对位置和时间参数的问题。在常用的直角坐标系中建立系统的数学模型, 并进行解算; 特别针对双星编队定位解算几何结构弱、解算结果的协方差矩阵不稳定而无法进行传统协方差分析的问题, 提出了基于球坐标变化的伪距定位方法。

关键词: 编队星座; 伪距; 星间相对测量; 球坐标

中图分类号: V412 文献标识码: A

## Pseudorange Positioning of Two Formation Flying Satellites Using Sphere Coordinate System

XING Jian-jun, XI Xiao-ning, WANG Wei, HAN Long

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** This paper describes the research on the pseudorange positioning of Autonomous Formation Flyer(AFF) of two satellites using pseudolites onboard, which is proposed by the NASA's Space Technology(ST-3). We build model and resolve relative position and time bias between satellites using Cartesian coordinate. The solution error covariance is very grave and unstable because observation geometry is very weak. In order to resolve this problem, we change Cartesian coordinate into sphere coordinate. It can be found that in the sphere coordinate system the solution error covariance is stable and can be used for simulation/covariance analysis.

**Key words:** formation constellation; pseudorange; relative measure; sphere coordinate

编队星座利用 GPS 作为敏感器用于状态测量, 可满足各种编队星座的要求, 但其精度和可靠性与可观测的 GPS 卫星的数目和几何分布密切相关。对于地面和中低轨道的编队用户, 一般不存在 GPS 卫星可观测数目的问题, 但对于高轨道、甚至深空探测的编队星座, 编队卫星一般不可能同时观测到足够数量的 GPS 卫星, 因此必须考虑增加另外的测量手段。

NASA 新千年计划中的 ST-3 提出了自主编队飞行技术, 在每一个编队卫星上安装多个接收天线和发射天线。发射天线发射类似于 GPS 的伪距和载波信号, 其它卫星的接收天线接收伪距和载波信号, 确定编队卫星之间的相对状态。ST-3 利用两个航天器组成编队飞行星座, 每颗卫星上装有三个接收天线和一个发射天线, 验证自主编队飞行技术<sup>[1]</sup>。文献[1]中使用精度为 1cm 的伪距观测量和精度为 10 $\mu$ m 的载波观测, 使星间相对位置测量精度达到 1cm, 方位角和仰角精度达到 1arcmin。

### 1 直角坐标系下双星编队伪距相对定位的数学模型

#### 1.1 基本假设

由于卫星具体的形状和卫星的具体任务有关, 因此文中假设编队卫星为边长 1m 的立方体, 但讨论的结论可应用于一般形状卫星。

观测量的精度: 伪距为 1cm, 载波为 10 $\mu$ m。

双星的伴随轨迹: 双星在空中的伴随轨迹为圆轨道, 半径为 1000m。

每颗卫星上装有一个发射天线和三个接收天线, 天线都安装于立方体一个面的四个角, 且两个卫

\* 收稿日期: 2002-02-05  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072076)  
作者简介: 杏建军(1975-), 男, 硕士生。

星天线的安装方式相同。

双星编队每个时刻有 6 个观测量，解算参数有 3 个相对位置参数和 1 个相对钟差参数，因此无法确定星间相对姿态。卫星的相对姿态必须由其它方法获得，在此假设已知。

## 1.2 相关的坐标系

文中涉及到两个直角坐标系：星座 1 的体坐标系和卫星 2 的星体坐标系。星体坐标系用来描述天线在卫星中的位置。其中取卫星 1 的体坐标系用于描述卫星之间的相对状态，称为星座坐标系。

某时刻的星座坐标系如图 1 所示，原点在卫星 1 的质心， $x$  轴与包含四个天线的平面垂直。

在星座坐标系中，卫星 2 的坐标为  $[x, y, z]$ ，相对卫星 1 的姿态为  $[\theta, \varphi, \psi]$ ，其中  $\theta$  为绕  $x$  轴的滚动角， $\varphi$  为绕  $y$  轴的俯仰角， $\psi$  为绕  $z$  轴的偏航角，三个姿态角为已知参数。由星座坐标系转化到卫星 2 的体坐标系的旋转矩阵  $M^{CB} = R_x(\theta)R_y(\varphi)R_z(\psi)$

## 1.3 伪距观测方程

两星编队的星座可获得 6 个伪距观测值  $\rho_{ij}^k$  ( $i$  为接收信号卫星， $k$  为发射信号卫星， $j$  为卫星  $i$  的接收信号天线， $k, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ ，其中  $k \neq i$ )。对于卫星 1、2，观测方程分别如下：

$$\rho_{1j}^2 = |\mathbf{R} + M^{BC} \cdot \mathbf{r}_{20}^B - \mathbf{r}_{1j}| + b_{12}, \quad \rho_{2j}^1 = |-\mathbf{R} + \mathbf{r}_{10} - M^{BC} \cdot \mathbf{r}_{2j}^B| - b_{12} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{r}_{ij}^B$  为第  $i$  颗卫星的第  $j$  个接收天线在卫星体坐标系中的位置矢量； $\mathbf{r}_{i0}^B$  为第  $i$  颗卫星的发射天线在卫星体坐标系中的位置矢量； $M^{BC}$  为卫星 2 的体坐标系到星座坐标系的旋转矩阵， $M^{BC} = (M^{CB})^{-1}$ 。

## 1.4 伪距观测方程线性化

根据方程 (1)，得到线性化的观测方程：

$$\text{对于卫星 1:} \quad \rho_{1j}^2 = e_{1j0}^2 \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + b_{12} + |\mathbf{R} + M^{BC} \cdot \mathbf{r}_{20}^B - \mathbf{r}_{1j}|_0 + v_{1j}^2 \quad (2)$$

$$\text{对于卫星 2:} \quad \rho_{2j}^1 = e_{2j0}^1 \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} - b_{12} + |-\mathbf{R} + \mathbf{r}_{10} - M^{BC} \cdot \mathbf{r}_{2j}^B|_0 + v_{2j}^1 \quad (3)$$

$e_{1j}^2$  表示卫星 2 的发射天线到卫星 1 接收天线视线的单位矢量，下标 0 表示按初始值计算， $v_{1j}^2$  表示测量误差。

线性化的伪距观测方程组简写为：

$$L = AX + V \quad (4)$$

其中：

$$L = \begin{bmatrix} \rho_{11}^2 \\ \rho_{12}^2 \\ \rho_{13}^2 \\ \rho_{21}^1 \\ \rho_{22}^1 \\ \rho_{23}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11}^2 \\ R_{12}^2 \\ R_{13}^2 \\ R_{21}^1 \\ R_{22}^1 \\ R_{23}^1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} e_{11}^2 & 1 \\ e_{12}^2 & 1 \\ e_{13}^2 & 1 \\ e_{21}^1 & -1 \\ e_{22}^1 & -1 \\ e_{23}^1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ b_{12} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_{11}^2 \\ v_{12}^2 \\ v_{13}^2 \\ v_{21}^1 \\ v_{22}^1 \\ v_{23}^1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

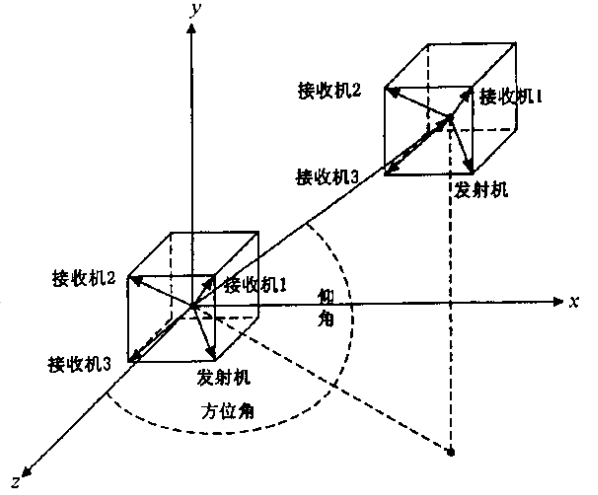


图 1 AFF 星座坐标系

Fig.1 AFF local coordinates

由上面的线性化方程,使用最小二乘法可解出3个相对位置参数和1个相对钟差参数,确定编队星座的相对状态。

## 2 球坐标系下双星编队伪距相对定位

当采用直角坐标系时,由于卫星间的距离为1000m,同一卫星天线之间的距离为1m,因此无论采用怎样的姿态,观测方程的几何结构都非常弱。由计算结果可知,实际的定位精度较好,卫星间的距离的实际误差为毫米级,方位角和仰角为 $10^{-2}$ arc量级,但采用直角坐标表述观测方程,观测方程的几何结构很弱,也就是说系数矩阵 $A$ 为病态矩阵,无法进行通常使用的协方差分析法。

由于采用直角坐标系无法进行协方差分析,因此采用球坐标进行分析,取球坐标为 $R$ 、 $\theta$ 、 $\Phi$ ,分别表示两卫星之间的距离、方位角、仰角。因此:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dR \\ d\theta \\ d\Phi \end{bmatrix}, \quad A' = A \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中: $A'$ 为相应的球坐标系下的系数矩阵。

## 3 数学仿真

仿真结果表明,经过这样的坐标变换,虽然定位结果并不会发生变化(因为直角坐标和球坐标只是坐标的不同表现形式,而坐标的本质并没有发生变化),但协方差矩阵的值大大减小,而且稳定性有显著提高,可进行协方差分析。给定同样的初值和姿态,进行2个时刻的仿真计算,结果如下:

初始条件: $R = 1992\text{m}$ ,  $\theta = 0\text{arc}$ ,  $\Phi = 0\text{arc}$ , 卫星2相对卫星1的姿态 $\theta = 0\text{arc}$ ,  $\phi = 0\text{arc}$ ,  $\Psi = 0\text{arc}$ 。每个卫星发射天线和接收天线的安装方式相同,它们在星体坐标系中的位置矢量为 $r_{10}^B = [0.5 \ 0.5 \ -0.5]^T$ 、 $r_{11}^B = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$ 、 $r_{12}^B = [0.5 \ -0.5 \ 0.5]^T$ 、 $r_{13}^B = [0.5 \ -0.5 \ -0.5]^T$ 。其中下标0表示发射天线,下标1、2、3表示接收天线。

表1 星座坐标系中编队卫星状态真值与仿真结果

Tab. 1 True states and simulation of formation satellites in local coordinate frame

观测量	真值	仿真值	误差	真值	仿真值	误差
	时刻1			时刻2		
$R$	999.922m	999.917m	0.005m	999.891m	999.894m	0.003m
$\theta$	0arc	-0.00519arc	0.00519arc	0arc	0.015arc	-0.015arc
$\Phi$	0arc	0.014arc	-0.014arc	0arc	-0.0062arc	0.0062arc
钟差 $dt$	0m	0.0134m	-0.0134m	0m	-0.0092m	0.0092arc

两个观测时刻的协方差矩阵:

$$\text{球坐标系中: } Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0.166667 & 0.000001 & -0.000001 & -0.000001 \\ 0.000001 & 1.0000 & -0.5000 & -1.0000 \\ -0.000001 & -0.5000 & 1.0000 & 1.0000 \\ -0.000001 & -1.0000 & 1.0000 & 1.5000 \end{bmatrix}$$

直角坐标系中:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.854126 & -737.496 & 696.751209 & 0.95642 \\ -737.496 & 999838893 & -4999201961 & -999.9204 \\ 696.751 & -499920196 & 999838893 & 999.9204 \\ 0.95642 & -999.9204 & 999.9204 & 1.500002 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 307.0882 & 13929.23 & -16163.73 & -20.064 \\ 13929.23 & 999783010 & -499892299 & -999.893 \\ -16163.73 & -499892299 & 999783099 & 999.893 \\ -20.064 & -999.893 & 999.893 & 1.500002 \end{bmatrix}$$

观测方程的系数阵 $A$ 和 $A'$ 分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9999 & -0.005 & 0.0129 & 1 \\ 0.9999 & -0.004 & 0.0129 & 1 \\ 0.9999 & -0.004 & 0.0139 & 1 \\ 0.9999 & -0.005 & 0.0149 & -1 \\ 0.9999 & -0.006 & 0.0149 & -1 \\ 0.9999 & -0.006 & 0.0139 & -1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & -0.9999 & 1 \\ 1.000 & 0.9999 & -0.9998 & 1 \\ 1.000 & 0.9999 & 0.0001 & 1 \\ 1.000 & 0.000 & 0.9999 & -1 \\ 1.000 & -0.9999 & 0.9998 & -1 \\ 1.000 & -0.9999 & -0.0001 & -1 \end{bmatrix}$$

法方程系数矩阵  $A^T A$  的条件数 COND1 和  $A'^T A'$  的条件数 COND2 分别为：

$$\text{COND1} = 1.09 \text{ E} - 007, \quad \text{COND2} = 2.5 \text{ E} - 002$$

由于两个观测时刻卫星之间的相对姿态未发生变化，卫星相对位置发生了很小的扰动，故其协方差矩阵应基本保持不变。但由仿真结果可知，由于直角坐标系中观测方程的几何结构很差，导致了直角坐标系中的协方差矩阵对误差太敏感，因此无法进行协方差分析。在球坐标系中，解决了系数矩阵病态的问题，其协方差矩阵很稳定，可利用它进行协方差分析。

由仿真计算结果可知，球坐标变换的实质是对估计参数进行局部坐标变化，改变原来参数视线平行的特性，使法方程系数矩阵的条件数提高了5个数量级，大大改善了原来病态的系数矩阵，避免了积累误差和截断误差的放大，使最终定位结果的协方差矩阵趋于稳定。

球坐标系中协方差分析结果：

$$R \text{ 的方差: } D_R = \sqrt{Q_{RR}} \cdot \sigma_0 = 0.41 \text{ cm} \quad \theta \text{ 的方差: } D_\theta = \sqrt{Q_{\theta\theta}} \cdot \sigma_0 = 0.01 \text{ arc}$$

$$\Phi \text{ 的方差: } D_\Phi = \sqrt{Q_{\Phi\Phi}} \cdot \sigma_0 = 0.01 \text{ arc} \quad \text{钟差的方差: } D_{dt} = \sqrt{Q_{dtdt}} \cdot \sigma_0 = 1.22 \text{ cm}$$

用蒙特卡罗法对  $R$  的协方差分析结果进行验证，用120个带随机误差的伪距观测值进行仿真，仿真值落在  $R - DR, R + DR$  的范围内概率为67.5%，协方差分析的概率为68.2%，二者结果一致。

## 4 结论

利用单个时刻高精度的伪距观测量进行定位，两卫星相对位置的测量精度为0.41cm，可达到系统的设计要求，方位角和仰角的测量精度为  $10^{-2}$ arc 量级，不满足系统的要求，因此必须结合或单独使用载波观测信息，编队飞行的星座由于自身的特殊构型，有时其观测方程的系数矩阵出现病态，为了消除这种问题，可进行适当的坐标变换。本文使用的方法可推广到任意坐标系。

## 参考文献：

- [1] Sien-Chong Wu, Da Kuang. Positioning with Autonomous Formation Flyer (AFF) on Space-Technology [C]. ION GPS'99, Nashville, TN, 14-17 September, 1999.
- [2] 王威, 郝晓宁, 许其凤. GPS用于编队卫星星座的位置与姿态测量[J]. 空间科学学报, 2002.
- [3] Parkinson B W, Spilker Jr J J. Global Positioning System: Theory and Applications [M]. Progress in Astronautics and Aeronautics, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, 1996.

