文章编号：1001－2486(2002)04－0096－04

具有多类索赔到达保险风险模型的破产问题※

张飞涟[1]，李　兵[2]

（1. 中南大学土木建筑学院，湖南 长沙　410075；2. 国防科技大学理学院，湖南 长沙　410073）

摘　要：应用 Markov 骨架过程的方法和补充变量技巧研究了索赔为多类一般到达的保险风险模型，分别得到了破产时间与破产时刻前后资产盈余的联合分布以及破产时间的分布。使得索赔为一般到达的保险风险问题的研究取得了较大的进展。

关键词：索赔；盈余过程；Markov 骨架过程

中图分类号：O211.67　　**文献标识码**：A

Ruin Problems for Insurance Risk Models with Varied Kinds of General Arrivals of Claims

ZHANG Fei-lian[1]，LI Bing[2]

（1 College of Civil Architectural Engineering，Central South University，Changsha 410075，China；

2. College of Science，National Univ. of Defense Teohnology，Changsha 410073，China）

Abstract：We study the insurance risk models with varied kinds of general arrivals of claims by using the method of Markov skeleton processes and the supplementary variables technique，and get the distribution of the ruin time and the joint distributions of the ruin time and the surplus assets prior to and at ruin. So much progress has been made in the study of the insurance risk problems with general arrivals of claims.

Key words：claim；surplus process；Markov process

1　模型的引入

保险公司的破产问题一直是保险风险研究的主要问题。当盈余过程是 Markov 过程时，以往主要是应用随机过程中的鞅方法和逐段决定 Markov 过程来进行研究，如文献［1～5］。当索赔不是 Poisson 到达时，盈余过程不必再是 Markov 过程，以往的方法很难直接使用。对于索赔是一类一般到达的保险风险问题，文［11］进行了研究。本文应用 Markov 骨架过程的方法来研究索赔为多类一般到达的保险风险问题。模型的具体提法如下：

（1）保费收入过程 $U_t=x+ct$，其中 $x>0$ 为保险公司初始资产，$c>0$ 是一常数。

（2）索赔到达的计数过程 $\{N_t,\ t\in R_+\}$ 由 K 个相互独立的计数过程组成，即 $N_t=N_t^{(1)}+\cdots+N_t^{(k)}$，其中 $\{N_t^{(1)}\},\cdots,\{N_t^{(K)}\}$ 各自的相继跳跃间隔时间相互独立有相同的分布函数 $F^{(1)}(t),\cdots,F^{(K)}(t)$，不失一般性可设 $F^{(1)}(0)=\cdots=F^{(K)}(0)=0$ 并设 $\{N_t^{(1)}\},\cdots,\{N_t^{(K)}\}$ 两两同时发生跳跃的概率为 0，例如 $F^{(1)}(t),\cdots,F^{(K)}(t)$ 为连续分布就满足此条件。

（3）索赔额序列 $\{Y_n, n\in N\}$ 与过程 $\{N_t^{(1)}\},\cdots,\{N_t^{(K)}\}$ 独立，且本身是独立同分布随机变量序列，有共同分布 $G(y)=P(Y_n\leqslant y)$，不失一般性可设 $G(0)=0$。

（4）盈余过程 $X_t=U_t-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$，当 $X(t)$ 小于或等于公司破产的资产临界值 r 时（$r<x$），公司立刻破产；令

$$\sigma_r=\begin{cases}\inf\{t\geqslant0,\ x(t)\leqslant r\} & \text{此集合非空}\\ \infty & \text{以上为空集合}\end{cases}$$

※ 收稿日期：2002－03－11
基金项目：铁道部科教司课题资助（2000F9）
作者简介：张飞涟（1964－），女，副教授，硕士。

则 σ_r 是保险公司的破产时间。

2 Markov 骨架过程

设 $X=\{x(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 是定义在 (Ω,F,P) 上取值于状态空间 E 的 Markov 骨架过程。$\forall t\geqslant 0$，$x\in E$，$A\in\boldsymbol{B}(E)$，令

$$h(t,x,A)=P(X(t)\in A,t<\tau_1\mid X(0)=x)$$
$$q(t,x,A)=P(X(\tau_1)\in A,\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)$$
$$P(t,x,A)=P(X(t)\in A\mid X(0)=x)$$

定理 1[9] $\{P(t,x,A),t\geqslant 0,x\in E,A\in\boldsymbol{B}(E)\}$ 是下列非负方程的最小非负解

$$f(t,x,A)=\int_0^t\int_E q(\mathrm{d}u,x,\mathrm{d}y)f(t-u,y,A)+h(t,x,A)$$
$$\forall t\geqslant 0,x\in E,A\in\boldsymbol{B}(E)$$

从而有

$$P(t,x,A)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\int_E q^{*n}(\mathrm{d}u,x,\mathrm{d}y)h(t-u,y,A)$$

其中，q^* 表示 q 自身 n 重卷积，即

$$q^{*0}(t,x,A)=\delta_{(0,\infty),A}(t,x)=\begin{cases}1 & t>0,x\in A\\0 & \text{否则}\end{cases}$$
$$q^{*1}(t,x,A)=q(t,x,A)$$
$$q^{*2}(t,x,A)=\int_E\int_0^t q(\mathrm{d}u,x,\mathrm{d}y)q^{*n-1}(t-u,y,A)(n\geqslant 2)$$

由以上定理知，h，q 唯一决定 Markov 骨架过程的一维分布。有关 Markov 骨架过程的进一步知识可参阅文献 [6~10]。

3 保险风险模型的几个重要分布

考虑 § 1 中提出的索赔为 K 类一般到达的保险风险模型。其中，$U_t=x+ct$ 是保费收入过程，$X(t)=X_t$ 是资产盈余过程，$G(y)$ 是索赔额的分布，σ_r 是破产时间。

对于 $i=1,\cdots,K$；令 $\tau_0^{(i)}=0$，$\tau_n^{(i)}$ 是 $t=0$ 之后第 i 类索赔的第 n 次发生时刻，即 $N_t^{(i)}$ 的第 n 个跳跃时刻。由 § 1 知，$\{\tau_{n+1}^{(i)}-\tau_n^{(i)}\}_{n\geqslant 1}$ 独立同分布，且

$$P(\tau_{n+1}^{(i)}-\tau_n^{(i)}\leqslant t)=F^{(i)}(t),\quad(n\geqslant 1)$$

$\forall s>0$，用 $F_s^{(i)}(t)$ 表示 $\tau_{n+1}^{(i)}-\tau_n^{(i)}$ 的条件分布，即 $\forall t\geqslant 0$

$$F_s^{(i)}(t)=\begin{cases}P(\tau_{n+1}^{(i)}-\tau_n^{(i)}\leqslant t+s\mid\tau_{n+1}^{(i)}-\tau_n^{(i)}>s) & F^{(i)}(s)<1\\ 1 & F^{(i)}(S)=1\end{cases}$$

令 $\tau_0=0$，$\tau_n(n\geqslant 1)$ 是 $t=0$ 之后第 n 次索赔到达的时刻，显然 τ_n 关于 n 严格单调增。定义 K 个随机过程 $\{\theta^{(i)}(t);t\geqslant 0\}(i=1,\cdots,K)$ 如下：$\theta^{(i)}(0)$ 表示 $t=0$ 及以前最后一次发生的第 i 类索赔时刻到 $t=0$ 的间隔时间，而

$$\theta^{(i)}(t)=\begin{cases}t+\theta^{(i)}(0), & (0,t]\text{ 内没发生第 } i \text{ 类索赔}\\ t-(0,t]\text{ 内最后一次第 } i \text{ 类索赔发生的时刻}, & \text{否则}\end{cases}\tag{1}$$

容易证明：$K+1$ 维过程 $(X(t),\theta^{(1)}(t),\cdots,\theta^{(K)}(t))$ 是马尔可夫过程且关于 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$ 构成马尔可夫骨架过程。

$\forall A\in\boldsymbol{B}(R)$，$F$ 和 G 产生的概率分布在集合 A 上的值仍用 $F(A)$ 和 $G(A)$ 表示。

定理 2 给出了破产时间 σ_r 与破产时刻资产盈余 $X(\sigma_r)$ 的联合分布。

定理2 设 $X(t)$ 是索赔为 K 类一般到达的保险风险模型的盈余过程，$\theta^{(i)}(t)$ 按（1）式定义，$x>r$，$u_1\geqslant 0$，…，$u_K\geqslant 0$，则 $\forall\, t\geqslant 0$，$A\in\boldsymbol{B}((-\infty,r])$，有

$$P(\sigma_r\leqslant t,\ X(\sigma_r)\in A\mid X(0)=x,\ \theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\int_0^t\prod_{K=1,\neq i}^{K}[1-F_{u_k}^{(k)}(s)]G(x+cs-A)F_{u_i}^{(i)}(\mathrm{d}s)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{r_+}^{\infty}\int_{R_+}\cdots\int_{R_+}q^{*n}(\mathrm{d}s,(x,u_1,\cdots,u_K),(\mathrm{d}y,\mathrm{d}v_1,\cdots,\mathrm{d}v_K))\sum_{i=1}^{K}\int_0^{t-s}\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{v_k}^{(k)}(w)]\,G(y+cw-A)\,F_{v_i}^{(i)}(\mathrm{d}w)$$

其中，$\forall A\in\boldsymbol{B}((r,+\infty))$，$B_1\in\boldsymbol{B}(R_+)$，…，$B_K\in\boldsymbol{B}(R_+)$

$$q^{*1}(s,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,B_1,\cdots,B_K))=q(s,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,B_1,\cdots,B_K))$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\delta_{B_i}(0)\cdot\int_0^s\prod_{k=1,\neq i}^{K}\delta_{B_k}(u_k+w)\,[1-F_{u_k}^{(k)}(w)]\,G(x+cw-A)\,F_{u_i}^{(i)}(\mathrm{d}w)$$

$$q^{*n}(s,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,B_1,\cdots,B_K))$$

$$=\int_0^s\int_{r_+}^{\infty}\int_{R_+}\cdots\int_{R_+}q(\mathrm{d}w,(x,u_1,\cdots,u_K),(\mathrm{d}y,\mathrm{d}v_1,\cdots,\mathrm{d}v_K))\,q^{*n-1}(s-w,(y,v_1,\cdots,v_K),(A,B_1,\cdots,B_K))\qquad n\geqslant 2$$

证：

$$P(\sigma_r\leqslant t,\ x(\sigma_r)\in A\mid X(0)=x,\ \theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(X(\tau_k)>r,k=0,\cdots,n,X(\tau_{n+1})\in A,\tau_{n+1}\leqslant t\mid X(0)=x,\theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=q_r(t,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,R_+,\cdots,R_+))+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega}\delta_{\{\tau_n\leqslant t\}}\delta_{\{X(\tau_k)>r,k=0,\cdots,n\}}q_r(t-\tau_n,(X(\tau_n),\theta^{(1)}(\tau_n),\cdots,\theta^{(K)}(\tau_n)),(A,R_+,\cdots,R_+))\cdot P(\mathrm{d}w\mid X(0)=x,\theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=q_r(t,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,R_+,\cdots,R_+))+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{r_+}^{\infty}\int_{R_+}\cdots\int_{R_+}q^{*n}(\mathrm{d}s,(x,u_1,\cdots,u_K),(\mathrm{d}y,\mathrm{d}v_1,\cdots,\mathrm{d}v_K))\times q_r(t-s,(y,v_1,\cdots,v_K),(A,R_+,\cdots,R_+))$$

以上应用了 $\{(X(t),\theta^{(1)}(t),\cdots,\theta^{(K)}(t)),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$ 构成马尔可夫骨架过程[7]；积分变换 $\Omega\to[0,\infty)\times R\times R_+\times\cdots\times R_+$：$w\to(\tau_n,x(\tau_n),\theta^{(1)}(\tau_n),\cdots,\theta^{(K)}(\tau_n))$；$\{(X(t),\theta^{(1)}(t),\cdots,\theta^{(K)}(t)),0\leqslant t<\sigma_r\}$ 关于 $\{\tau_n\wedge\sigma_r\}_{n\geqslant 0}$ 构成马氏骨架过程。

另外，注意 $\tau_n^{(i)}$ 与 $\tau_n^{(j)}$ 独立，且 $\tau_n^{(i)}=\tau_n^{(j)}$ 的概率为 0 $(i\neq j)$，有

$$q_r(t,(x,u_1,\cdots,u_K),(A,R_+,\cdots,R_+))$$

$$=P(x(\tau_1)\in A,\ \tau_1\leqslant t\mid x(0)=x,\ \theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=P(x+c\tau_1-y_1\in A,\ \tau_1\mid\theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}P(x+c\tau_1^{(i)}-y_1\in A,\ \tau_1^{(i)}\leqslant t,\ \tau_1^{(i)}<\tau_1^{(j)},\ i\neq j\mid\theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\int_0^t\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{u_k}^{(k)}(s)]\,G(x+cs-A)\,F_{u_i}^{(i)}(\mathrm{d}s)\,q_r(t-s,(y,v_1,\cdots,v_K),(A,R_+,\cdots,R_+))$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\int_0^{t-s}\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{v_k}^{(k)}(w)]\,G(y+cw-A)\,F_{v_i}^{(i)}(\mathrm{d}w)$$

证毕。

定理3 设 $X(t)$ 是索赔为 K 类一般到达的保险风险模型的盈余过程，$\theta^{(i)}(t)$ 按式（1）定

义，$x>r$，$u_1\geqslant 0$，…，$u_K\geqslant 0$，则$\forall\, t\geqslant 0$，$B\in \boldsymbol{B}$（$(r,+\infty)$），有

$$P(\sigma_r\leqslant t,\ X(\sigma_r^-)\in B\mid X(0)=x,\ \theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\int_0^t \delta_B(x+cs)[1-G(x+cs-r-)]\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{u_k}^{(k)}(s)]F_{u_i}^{(i)}(\mathrm{d}s)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{r_+}^{\infty}\int_{R_+}\cdots\int_{R_+} q^{*n}$$

$$(\mathrm{d}s,(x,u_1,\cdots,u_K),(\mathrm{d}y,\mathrm{d}v_1,\cdots,\mathrm{d}v_K))\cdot\sum_{i=1}^{K}\int_0^{t-s}\delta_B(y+cw)[1-G(y+cw-r-)]$$

$$\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{v_k}^{(k)}(w)]F_{v_i}^{(i)}(\mathrm{d}w)$$

其中，δ_B（·）表示示性函数，而 q^{*n}按定理 2 中定义。

证：类似于定理 2 的证明推导，易得上述结果。

作为定理 2 或定理 3 的特殊情况，可得到破产时间的分布。

推论 1　设 $x>r$，$u_1\geqslant 0$，…，$u_K\geqslant 0$，则$\forall\, t\geqslant 0$，有

$$P(\sigma_r\leqslant t\mid x(0)=x,\ \theta^{(1)}(0)=u_1,\cdots,\theta^{(K)}(0)=u_K)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}\int_0^t[1-G(x+cs-r-)]\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-F_{u_k}^{(k)}(s)]F_{u_i}^{(i)}(\mathrm{d}s)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{r_+}^{\infty}\int_{R_+}\cdots\int_{R_+}q^{*n}$$

$$(\mathrm{d}s,(x,u_1,\cdots,u_K),(\mathrm{d}y,\mathrm{d}v_1,\cdots,\mathrm{d}v_K))\cdot\sum_{i=1}^{K}\int_0^{t-s}[1-G(y+cw-r-)]\prod_{k=1,\neq i}^{K}[1-$$

$$F_{v_k}^{(k)}(w)]F_{v_i}^{(i)}(\mathrm{d}w)$$

证：在定理 2 中令 $A=(-\infty,r]$，或在定理 3 中令 $B=(r,+\infty)$ 均得上述结果。

参考文献：

[1] Gerber H U. Martingales in risk theory [J]. Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math., 1973, 73: 205-216.

[2] Harrison J M. Ruin problems with compounding assets [J]. Stoch. Proc. Appl, 1977, 5: 67-79.

[3] Delbaen F, Haezendonck J. Classical risk theory in an economic environment [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1987, 6: 85-116.

[4] Dassios A, Embrechts P. Martingales and insurance risk [J]. Commun. Statist. -Stochastic Models, 1989, 5 (2): 181-217.

[5] Embrechts P, Schmidli H. Ruin estimation for a general insurance risk model [J]. Adv. Appl. Probab., 1994, 36: 404-422.

[6] 侯振挺，刘再明，邹捷中. QNQL 过程：(H, Q) 过程及其应用举例 [J]. 科学通报，1997，42 (9)：1003-1008.

[7] 侯振挺，刘再明，邹捷中等. Markov 骨架过程 [J]. 科学通报，1998，43 (5)：457-466.

[8] 侯振挺，刘再明，邹捷中. 具有马尔可夫骨架的随机过程 [J]. 经济数学，1997，14 (1)：1-13.

[9] 侯振挺，刘再明，邹捷中. 马尔可夫骨架过程 [J]. 长沙铁道学院学报，1999，17 (2)：1-10；17 (3)：1-6.

[10] 侯振挺，刘万荣，刘再明等. 马尔可夫骨架过程 [M]. 长沙：湖南科技出版社，2000.

[11] 刘再明，张飞涟，侯振挺. 索赔为一般到达的保险风险模型 [J]. 应用数学，2002. 1，15 (1)：35-39.