

并联机构中奇异性的稳定性问题*

沈 辉,吴学忠,李泽湘

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073)

摘 要 将映射理论中的临界点稳定性概念引入并联机构的奇异性分析中,提出稳定奇异性和非稳定奇异性的概念,研究了低维并联机构奇异性的稳定性情况,对几种典型机构的分析验证了这种分类的合理性。提出的分析方法可以为并联机构的机构设计和控制等方面提供理论依据。

关键词 :并联机构,奇异点,稳定性,微分流形

中图分类号 :TH112 文献标识码 :A

Stability of Singularity in Parallel Manipulators

SHEN Hui, WU Xue-zhong, LI Ze-xiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :This paper introduces the concept of the critical points stability of the mapping theory into the singularity analysis of parallel manipulator and proposes the concept of stable singularity and unstable singularity. Some low degree-of-freedom parallel manipulators are researched into and the results verify that the classification of singularities according to their stability is reasonable. The proposed method can provide theoretic foundation for the structure design and control of parallel manipulators.

Key words :parallel manipulator, singularity, stability, differential manifold

并联机构与串联机构相比具有负载大、刚度高和精度高的优点,但存在于并联机构中的各种奇异性给机构的控制带来一定的困难,如机构在驱动奇异形下将是不完全可控的^[1]。研究并联机构的奇异性,对机构的设计、路径规划以及控制等方面具有重要的作用,已经受到学者的广泛关注^[2~4]。

目前针对并联机构的奇异性分析多集中在奇异性的性质、分类或计算方法上,很少讨论奇异性与机构参数之间的关系。一个重要的问题是,存在于并联机构中的奇异点,哪些是可以在机构设计阶段通过机构参数调整就可以消除的,而另一些奇异点只能在控制中加入其它措施,例如路径规划或冗余驱动方法加以避免。依照奇异点的这种性质,本文借助映射临界点的稳定性概念,提出并联机构奇异性的稳定性的概念,并研究机构在这些不同奇异点附近的性质。既然机构在非稳定奇异点处经常出现自运动(self-motion)现象,这些对机构本身异常有害的奇异点在机构设计过程中就应该尽量消除。而稳定奇异点反映了一定结构的机构本身具有的规律,对机构的影响相对较小。了解奇异点的这种性质,将有助于对机构参数和结构进行优化设计。本文旨在对并联机构中奇异性的稳定性进行初步的探讨,研究的对象限于平面 2、3 维的简单机构。

1 可微映射的稳定性

考虑两流形之间的可微映射 $f: M^m \rightarrow N^n$, 其微分形式 df 是两流形切空间之间的线性映射

$$df_x: T_x M^m \rightarrow T_x N^n$$

定义 1 如果可微映射 $f: M^m \rightarrow N^n$ 的微分形式 df 在点 $x \in M^m$ 处降秩, 则点 x 称为映射 f 的临界

* 收稿日期:2002-05-10

基金项目:国家自然科学基金-香港青年学者合作研究基金资助(50029501)

作者简介:沈辉(1975-),男,博士生。

点, f 在点 x 处的函数值 $f(x)$ 称为临界值。

定义 2 如果光滑函数在临界点处的二次微分是非退化的二次形式, 则称该临界点是稳定的。

例如, 函数 $y = x^2$ 的 0 点为稳定的临界点, 而函数 $f = x^3$ 在 0 点的临界点是不稳定的。

定义 3 对于可微映射 $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ 和 $f_2: M_2 \rightarrow N_2$, 如果存在微分同胚 h 和 k , 满足

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

则称映射 f_1 和 f_2 是可微相等 (differentiable equivalence) 的。

可微相等性的概念也可以在集合 $\Omega(M, N)$ 上理解, 这里的 $\Omega(M, N)$ 是流形 M 和 N 之间所有可微映射所组成的集合。

定义 4^[5] 假设 $x \in M$ 处的光滑映射 $f: M \rightarrow N$, $\Omega(M, N)$ 是流形 M 和 N 之间所有可微映射所组成的集合。如果 f 在 $\Omega(M, N)$ 上左-右微分同胚群作用下的轨道包含 $f \in \Omega(M, N)$ 的某个邻域, 则 f 被称为是稳定的。

虽然稳定映射的概念十分抽象, 但映射的稳定性和临界点之间存在直观的含义^[5]: 如果某个映射是稳定的, 即使映射形式发生微小改变, 映射的临界点也不发生改变, 例如 $f(x) = x^2$; 而如果某个映射是不稳定的, 如果函数形式发生微小改变, 函数的临界点也将同时发生改变, 例如函数 $f(x) = x^3$ 。图 1 显示了这两种映射的稳定情况, 映射 $f(x) = x^3$ 在受到扰动后, 出现了两个新的稳定临界点。

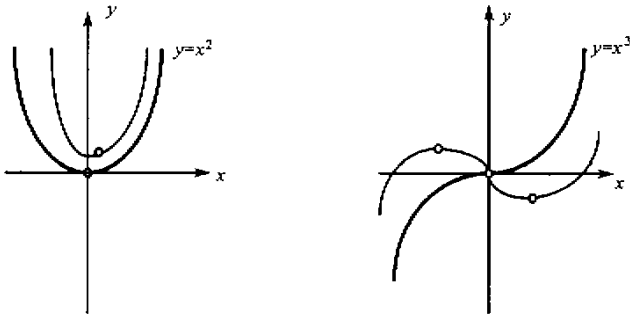


图 1 临界点的稳定性

Fig. 1 Stability of critical points

并联机构中的奇异位形一般可以分成位形奇异、驱动奇异和末端执行器奇异等三类, 后两种奇异性本质上是由于驱动关节和末端执行器坐标的引入而产生的对位形空间局部参数化时出现的奇异^[2], 这两种奇异性与驱动关节的位置、数量以及机构参数密切相关。实际上, 这些奇异性是机构在不同空间之间的可微映射的临界点^[5]。例如, 驱动奇异出现在位形空间向驱动关节空间投影映射的临界点处。这样, 研究这些不同映射的稳定情况, 就可以了解相应的不同奇异性的稳定性。如果映射是稳定的, 则这样的奇异性无法通过机构参数的调整将其消除。

2 稳定奇异点

上述概念虽然不难理解, 但判断一个映射是否稳定的过程过于复杂^[5], 并且这些不同空间之间的映射一般不能得到其显式表达。目前研究比较充分的仅限于 2、3 维的低维情况。在实际运用中, 常利用这些奇异点附近的几何性质进行分析判断。

下面讨论一个简单的例子, 即 Whitney 映射

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 + x_1 x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (1)$$

它的 Jacobian 矩阵为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

该映射的所有临界点构成一条光滑曲线,该光滑曲线即是该映射的奇异流形,如图 2 所示。

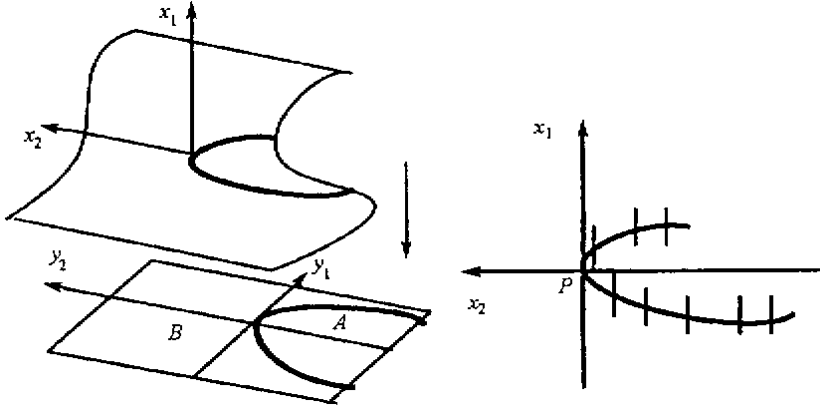


图 2 Whitney 映射及其奇异流形

Fig.2 The Whitney mapping and singularities

Whitney 定理^[5]指出,两个 2 维流形间的可微映射存在稳定临界点的充分必要条件是这些临界点可以用局部坐标表示成下面两种形式之一:

$$(1) y_1 = x_1^2, y_2 = x_2 \text{ (fold 点)} \quad (2) y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, y_2 = x_2 \text{ (pleat 点)}$$

在临界点处 Jacobian 矩阵的秩小于 2,所有临界点构成奇异曲线 $3x_1^2 + x_2 = 0$,该 Jacobian 矩阵的零空间构成沿该奇异曲线的场。这些场可以用平行于 x_1 轴的直线段来表示。可以看出,这些直线段只在 P 点(pleat 点)与该奇异曲线相切,而奇异曲线的其它点都是 fold 点。下面分析一个具体的例子。图 3 显示了一种平面 2 自由度并联机器人的结构示意图,其中 A_1 、 A_2 为驱动关节。该机构的驱动奇异矩阵为

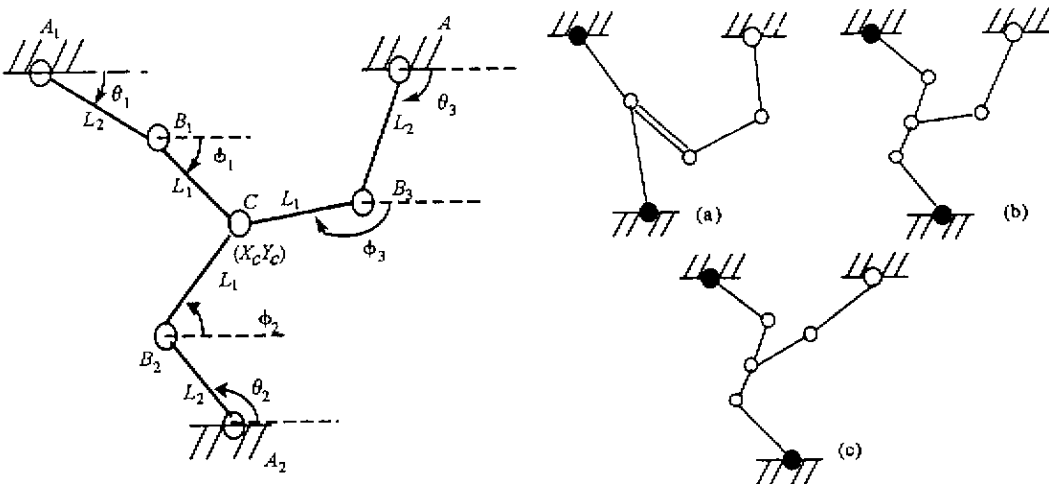


图 3 二自由度平面并联机构及其奇异位形 (a)非稳定奇异 (b)fold 奇异点 (c)pleat 奇异点

Fig.3 The 2-DOF planar parallel manipulator and its singularities

(a) unstable singularity (b) fold singularity (c) pleat singularity

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -l_1 \sin \phi_2 & l_1 \sin \phi_2 & 0 \\ 0 & l_1 \cos \phi_1 & -l_1 \cos \phi_2 & 0 \\ l_2 \sin \theta_3 & -l_1 \sin \phi_1 & 0 & l_1 \sin \phi_3 \\ -l_2 \cos \theta_3 & l_1 \cos \phi_1 & 0 & -l_1 \cos \phi_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由 $\det(M) = 0$ 得到机构驱动奇异的条件 $\sin(\phi_1 - \phi_2) \sin(\theta_3 - \phi_3) = 0$ 。由 $\sin(\phi_1 - \phi_2) = 0$ 得到两个解, 其中 $\phi_1 = \phi_2$ 的解对应于图 3(a) 的位形情况。既然这时重叠的两个杆长必须相等, 该奇异性显然是不稳定的。下面具体分析 $\phi_1 = \phi_2 + \pi$ 的解情况。该解构成该机构的整个稳定驱动奇异流形, 它是由约束方程以及 $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ 所定义的 6 维空间中的一条曲线。仿照 Whitney 映射, 同样考虑驱动奇异矩阵的该向量场, 通过符号计算, 可以得到该向量场的基为

$$V = \csc(\phi_1 - \theta_3) \sin(\phi_3 - \theta_3) \frac{\partial}{\partial \phi_1} - \csc(\phi_1 - \theta_3) \sin(\phi_3 - \theta_3) \frac{\partial}{\partial \phi_2} - \frac{l_1 \csc(\phi_1 - \theta_3) \sin(\phi_1 - \phi_3)}{l_2} \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \frac{\partial}{\partial \phi_3} \quad (4)$$

而稳定驱动奇异流形的切向量场为

$$Y = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \theta_3} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial \phi_2} + \frac{\partial}{\partial \phi_3} \quad (5)$$

其中

$$\gamma_1 = \frac{4l_1 \cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2 - 2\theta_2)\right) \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \sin(\phi_3 - \theta_3)}{-2l_2(\sin(\phi_2 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_3) - \sin(\phi_1 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_3))}$$

$$\gamma_2 = \frac{l_1(\sin(\phi_3 - \theta_1) \sin(\phi_2 - \theta_2) - \sin(\phi_1 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_3))}{l_2(\sin(\phi_2 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_3) - \sin(\phi_1 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_3))}$$

$$\gamma_3 = \frac{-2\sin(\theta_1 - \theta_2) \sin(\phi_3 - \theta_3)}{\cos(\phi_2 + \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) - \cos(\phi_1 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3) + \cos(\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3) - \cos(\phi_2 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_3)}$$

当 $\theta_3 = \phi_3$, 即 $V \parallel Y$ 时, 向量场 V 切于奇异流形, 相应的点相当于 Whitney 映射中的 pleat 点(如图 3(c)), 而稳定奇异流形上的其它点相当于 Whitney 映射的 fold 点(如图 3(b))。

3 非稳定奇异性

通过对映射稳定性性质的研究表明, 非稳定奇异点常常发生在机构的某些参数满足一定条件的特殊情况, 这时机构常常伴随有自运动的奇异现象, 但是通过对机构相应参数的适当调整, 破坏奇异产生的条件, 即可在机构设计过程中消除这类奇异性的影响。

仍然考虑二自由度平面并联机构, 将 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 同时作为驱动关节, 这时的机构驱动关节数目大于机构的运动维数, 机构处于冗余驱动状态。采用冗余驱动的控制方法大大减少了机构的驱动奇异点。但是当机构的某些参数满足一定条件时, 机构仍然可以呈现某些特殊的奇异状态。例如当 B_1 、 B_2 和 B_3 三点重合时, 机构处于不稳定奇异位形情况, 这时的机构出现绕 C 点的内部旋转运动(如图 4 所示)。而一旦改变三个杆的相对长度, 则可以使机构不再出现该奇异位形。

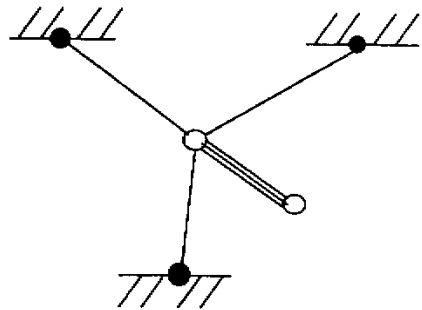


图 4 非稳定驱动奇异位形

Fig.4 The unstable actuator singularity

4 小结

采用可微映射的临界点理论研究了存在于并联机构中的奇异点稳定性问题。依照奇异性与机构参数之间的关系将并联机构中的奇异点分为稳定奇异点和非稳定奇异点。对几种典型并联机构的奇异分析表明了这种分类方法的可行性。由于可微映射稳定性分析本身的复杂性, 研究只限于低维平面机构情况。如何分析高维尤其是空间 6 维并联机构奇异性的稳定性将是需要进一步研究的课题。(下转第 44 页)

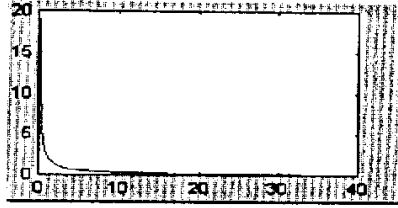


图1 系统瞬时失效率曲线

Fig.1 Moment failure rate of system

确定随机变量分布函数的方法,可以很好地解决小样本,甚至极小样本问题。当前,随着系统结构日趋复杂化,以及技术条件、经济条件等诸多因素的制约,系统的试验数据越来越有限,因而该技术有很大的工程应用价值;再次,在曲线拟合的第二阶段,吸收了 Duane 模型简单、直观、易于进行参数估计的优点,但经典的 Duane 模型只适用于较长投试时间内,可修复系统的可靠性增长试验。对于分阶段试验、不同场景下的试验,应用上将遇到困难。本文所给出的方法则可以不受此限制,可以很好地解决分阶段试验,甚至是不同场景下的试验的可靠性增长分析,因而有着很广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] [美] 阿姆斯特特. 可靠性数学 [M]. 彭兴文译. 北京: 科学出版社, 1978.
- [2] 武小悦, 陈忠贵等. 柔性制造系统的可靠性技术 [M]. 北京: 兵器工业出版社, 2000.
- [3] 陈兆能, 邱泽麟, 余经洪. 试验设计与分析 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1991.

(上接第 40 页)

参考文献:

- [1] Liu G F, Wu Y L, Li Z X. Analysis and Control of Redundant Parallel Manipulators [C]. IEEE international Conference on Robotics and Automatiom (ICRA). 2001 3748 - 3754.
- [2] Merlet J P. Singular Configuration of Parallel Manipulators and Grassman Geometry [J]. Int. J. of Rob. Res, 1989, (5) 45 - 56.
- [3] Collins C L. The Quartic Singularity Surfaces of Planal Platforms in the Clifford Algebra of the Projective Plan [J]. Mech. Mach. Theory, 1998, 33(7) 931 - 944.
- [4] 沈辉, 吴学忠, 李圣怡, 李泽湘. 并联机构的奇异位形分析及冗余驱动控制方法 [J]. 国防科技大学学报, 2002 (2): 19 - 22.
- [5] Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps [M]. Volumn I. Birkhauser, 1985.

