

多进制多维信号集信道容量分析及其计算*

时信华 李 克 朱 江 张尔扬

(国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘 要 描述了信道容量的一般概念,具体就波形信道、连续信道及离散输入连续输出无记忆信道进行了分析,分别导出了它们的信道容量公式。结合几种常见的多进制多维调制技术 MPSK、MQAM、L 正交信号及其星座分析,给出了它们信道容量的 Monte-Carlo 模拟以及数值积分模拟,同时分析了由于信号集扩展而带来的编码增益。

关键词 :调制 ;编码 ;信道容量 ;格状编码调制

中图分类号 :TN911.1 文献标识码 :A

The Analysis and Calculation of the Channel Capacity for the M-ary Multidimensional Signal Sets

SHI Xin-hua ,LI Ke ,ZHU Jiang ,ZHANG Er-yang

(College of Electronic Science and Engineering ,National Univ. of Defense Technology ,Changsha 410073 ,China)

Abstract :This paper describes the general concept of the channel capacity , gives a detailed analysis of the channel capacity of the waveform channel , continuous channel and the discrete input continuous output memoryless channel , then derives their general formulae of the channel capacity respectively. Combined with several known m - ary multidimensional modulation techniques and their constellation analysis , Monte - Carlo simulation and the numerical integral simulation are given for their channel capacity . Finally the coding gain due to the signal sets expansion is analyzed.

Key words :modulation ; coding ; channel capacity ; trellis coded modulation

对于特定调制方案的信道容量的分析,有助于在扩展信号集以获取编码增益与接收机复杂性之间进行折衷平衡。这种分析是利用 M 进制信号集进行格状编码调制设计必须首先进行的,因为此设计的前提之一就是进行信号集扩展为编码提供冗余度。

本文中信道容量的分析仅限于传输波形是有限能量的带限波形,这种类型的波形可以表示为 N 维空间中的矢量,这样对 M 进制信号集的分析就可以转为对信号星座的分析。在信道容量分析中假设:① 信道噪声为带限 AWGN(功率谱密度为 $N_0/2$);② 信道模型是无记忆的;③ 接收端采用相关检测;④ 传输波形具有等符号间隔 T 。

1 带限输入 AWGN 信道的信道容量

假设 X 和 Y 分别代表输入和输出符号集,它们可以是有限的或是无限的,分别对应于其符号(随机变量)取值为离散的或是连续的两种情况。信道容量定义^[1]为对于所有的信源分布,每个固定信道所能获得的最大的信息传输率,即可以获得的最大的互信息量,表示为:

$$C = \max_{p(x)} \{I(X; Y)\} = \max_{p(x)} \{H(X) - H(X|Y)\} = \max_{p(x)} \{H(Y) - H(Y|X)\} \quad [\text{bit/sym}]$$

其单位是比特/符号。对于输入和输出都是有限符号集的离散无记忆信道(DMC)而言,其信道容量表达式很容易得到。以下将主要讨论连续输入连续输出无记忆信道(CCMC)和离散输入连续输出无记忆信道(DCMC)的信道容量。

1.1 CCMC 的信道容量

在分析 CCMC 的信道容量之前,先来看看波形信道,其输入 $\{x(t)\}$ 和输出 $\{y(t)\}$ 一般可用随机过

* 收稿日期:2002-05-10
基金项目:国家部委基金资助项目(113030401)
作者简介:时信华(1975—)男,博士生。

程来描述。由于已经假设传输波形是限时限频的有限能量波形,若其时间取值范围为 $0 \leq t \leq T$,并具有带宽 W ,则输入波形可表示为 $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n \phi_n(t)$,其中 N 为信号空间的维数, $N = 2WT$; $\{\phi_n(t), n = 1, 2, \dots, N\}$ 是一组标准正交基函数。

这样就在波形 $x(t)$ 和它的坐标矢量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 之间建立起一一对应的关系。对波形信道而言,信道输入波形 $\{x(t)\}$ 就可以转换成连续型的随机序列 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$,同样地信道输出波形 $\{y(t)\}$ 就可以转换成连续型的随机序列 $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ 。至此,对波形信道的研究就可转化为对 CCMC 的研究,CCMC 也可称为连续信道,如图 1。对于 CCMC,由假设条件可知 (n_1, n_2, \dots, n_N) 是一组独立同分布(iid)的随机变量,每个噪声分量服从零均值,方差 $\sigma_n^2 = N_0 W$ 的高斯分布,则:

$$C_{CCMC} = \max_{p(\mathbf{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \log_2 \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad [\text{bit/sym}]$$

可以证明当输入 N 维随机序列 (X_1, X_2, \dots, X_N) 中每一分量都服从均值为零,方差 $\sigma_x^2 = P$ 的高斯分布(即 $X_i \sim N(0, P), i = 1, 2, \dots, N$) 并且相互独立时(此时输入信号 $\{x(t)\}$ 具有均值为零,平均功率 P 的高斯白噪声特性),信道获得最大的信息传输率,即此时达到信道容量,由上式可以推导得出著名的 Shannon-Hartley 公式:

$$C_{CCMC} = \frac{N}{2} \log_2(1 + SNR) = WT \log_2(1 + SNR) [\text{bit/sym}] \text{ 其中 } SNR = \frac{P}{N_0 W}$$

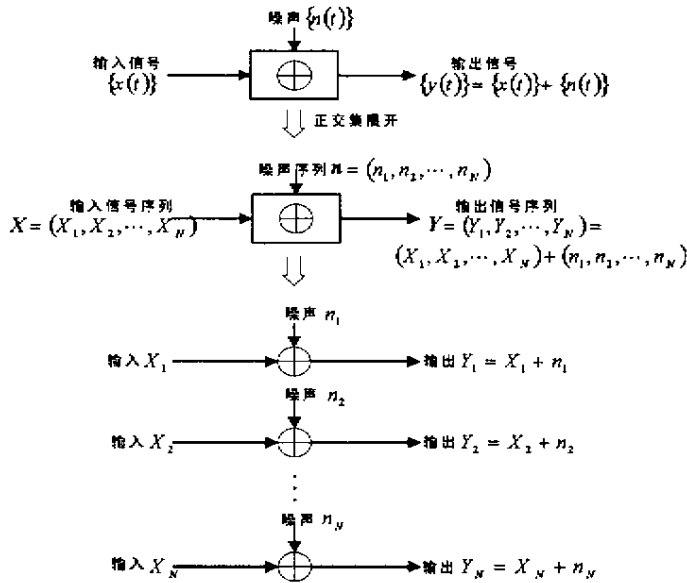


图 1 波形信道转换成连续输入连续输出无记忆信道

Fig.1 The transform of waveform channel to CCMC

上式适用于高斯可加波形信道,当信道输入信号是平均功率受限的高斯白信号时,信息传输率才达到该信道容量。一般实际信道是非高斯波形信道,但高斯白噪声波形信道是平均功率受限条件下的最差信道,所以香农公式可适用于其他一般非高斯波形信道,由高斯信道所适用的香农公式得出的结果是非高斯信道的性能(信道容量)的下限值。

1.2 DCMC 的信道容量

考虑 M 进制信号(符号) $\{x_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$ 是等符号间隔的有限能量带限波形,即时间范围受限于 $0 \leq t \leq T$,并具有带宽 W 。同上,每个波形可以在一组标准正交集上展开: $x_m(t)$

$= \sum_{n=1}^N x_{mn} \phi_n(t), m = 1, 2, \dots, M$ 这样就在每个信号波形 $x_m(t)$ 和它的坐标矢量 $\mathbf{x}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mN})$ 之间建立起一一对应的关系。同样地 (n_1, n_2, \dots, n_N) 是一组独立同分布的随机变量,且 $n_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, N$ 。则信道容量(当输入为等概率分布时信息传输率达到最大值,即信道容量)为:

$$\begin{aligned}
 C_{DCMC} &= \max_{\{x_{mi}, i=1, 2, \dots, M\}} \sum_{m=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}) p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \log_2 \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_m)}{p(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \quad [\text{bit/sym}] \\
 &= \log_2 M - \frac{1}{M(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \cdot \sum_{m=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_m|^2}{2\sigma^2}\right) \log_2 \left[\sum_{i=1}^M \exp\left(-\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{y} - \mathbf{x}_m|^2}{2\sigma^2}\right) \right] d\mathbf{y} \\
 &= \log_2 M - \frac{1}{M(\pi)^{N/2}} \cdot \sum_{m=1}^M \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\mathbf{t}|^2) \log_2 \left[\sum_{i=1}^M \exp(-2\mathbf{t} \cdot \mathbf{d}_{mi} - |\mathbf{d}_{mi}|^2) \right] d\mathbf{t}
 \end{aligned}$$

其单位是比特/符号。上式中,利用到 $\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}_m}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = \mathbf{t}; \left(\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = \mathbf{d}_{mi}$ 。

由上式可以看出,DCMC 信道容量的计算需要 N 维积分,对于此 N 维积分可以采用 N 维数值积分模拟,而每一维都属于 Gauss-Hermite 积分,有关 Gauss-Hermite 积分的求积节点以及求积系数的选取可以参考文献 [4, 6]。

2 多进制多维调制信号集分析

2.1 脉冲幅度调制 PAM

1 维 M 进制 PAM 信号可以表示为:

$$x_m(t) = \text{Re} \{ A_m g(t) e^{j2\pi f_c t} \} = A_m g(t) \cos 2\pi f_c t, m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T$$

其中, $A_m = (2m - 1 - M)d, m = 1, 2, \dots, M$ 实信号 $g(t)$ 称为成形脉冲,用于控制传送波形的频谱; f_c 为载波频率, T 为符号间隔。将 PAM 信号按正交集展开,正交集取为: $\{\phi(t) = \sqrt{2/\epsilon_g} g(t) \cos 2\pi f_c t\}$, 其空间信号点坐标为: $\vec{x}_m = (A_m \sqrt{\epsilon_g/2}), m = 1, 2, \dots, M$ 。其中, ϵ_g 为 $g(t)$ 的能量。PAM 信号的平均符号能量为: $\epsilon_{av} = (M^2 - 1)d^2 \epsilon_g / 6$ 。

2.2 相移键控 PSK

2 维 M 进制 PSK 信号可以表示为:

$$x_m(t) = \text{Re} \{ g(t) e^{j2\pi(m-1)/M} e^{j2\pi f_c t} \} = g(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1)\right), m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T$$

将 PSK 信号按正交集展开,正交集取为:

$\{\phi_1(t) = \sqrt{2/\epsilon_g} g(t) \cos 2\pi f_c t, \phi_2(t) = -\sqrt{2/\epsilon_g} g(t) \sin 2\pi f_c t\}$, 其空间信号点坐标为: $\mathbf{x}_m = (\sqrt{\epsilon_g/2} \cos(2\pi(m-1)/M), \sqrt{\epsilon_g/2} \sin(2\pi(m-1)/M)), m = 1, 2, \dots, M$ 。其中, ϵ_g 为 $g(t)$ 的能量。PSK 信号的平均符号能量为: $\epsilon_{av} = \epsilon_g / 2$ 。

2.3 正交幅度调制 QAM

2 维 M 进制 QAM 信号可以表示为:

$$\begin{aligned}
 x_m(t) &= \text{Re} \{ (A_{mc} + jA_{ms}) g(t) e^{j2\pi f_c t} \} \\
 &= A_{mc} g(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{ms} g(t) \sin(2\pi f_c t), m = 1, 2, \dots, M, 0 \leq t \leq T
 \end{aligned}$$

将 QAM 信号按正交集展开,正交集取为:

$\{\phi_1(t) = \sqrt{2/\epsilon_g} g(t) \cos 2\pi f_c t, \phi_2(t) = -\sqrt{2/\epsilon_g} g(t) \sin 2\pi f_c t\}$, 其空间信号点坐标为: $\mathbf{x}_m = (A_{mc} \sqrt{\epsilon_g/2}, A_{ms} \sqrt{\epsilon_g/2}), m = 1, 2, \dots, M$ 。其中, ϵ_g 为 $g(t)$ 的能量。对于信号星座图是矩形(称为 Z_2 格的子集)的情况,信号幅度 A_{mc} 和 A_{ms} 取自集合 $\{(2m - 1 - M)d, m = 1, 2, \dots, M\}$ 如图 2 所示。

此时 QAM 信号的平均符号能量为: 当 $M = 4$ 时, $\epsilon_{av} = d^2 \epsilon_g$; 当 $M = 8$ 时, $\epsilon_{av} = 3d^2 \epsilon_g$; 当 $M = 16$

时, $\epsilon_{av} = 5d^2\epsilon_g$; 当 $M = 32$ 时, $\epsilon_{av} = 10d^2\epsilon_g$; 当 $M = 64$ 时, $\epsilon_{av} = 21d^2\epsilon_g$

2.4 M 进制 N 维正交信号

M 进制 N 维正交信号集之间的信号是彼此正交的, 主要讨论 L - 正交信号, 其信号集中包含 V 个相互独立的 LPSK 子集, 总的符号数为 $M = VL$ 。所有符号波形等能量 ϵ_x 且具有相同的符号持续时间 T, 符号集维数 $N = V, L = 1, 2$ 时; $N = 2V, L > 2$ 时。L - 正交信号可以表示为如下形式^[5]:

$$x_m(t) = \sqrt{\epsilon_x} [\cos\theta_l \phi_{v,l}(t) + \sin\theta_l \phi_{v,l}(t)], m = (v-1)L + l; v = 1, 2, \dots, V; l = 1, 2, \dots, L$$

其中 $0 \leq t \leq T, \epsilon_x$ 为每一信号的能量, 也即为 L - 正交信号的平均符号能量; $\theta_l = \chi(l-1)\pi/L; \{\phi_{v,l}(t), \phi_{v,l}(t), v = 1, 2, \dots, V\}$ 为标准正交函数集。L - 正交信号的空间星座点坐标可以描述为:

$$x_l = (\sqrt{\epsilon_x} \cos\theta_l, \sqrt{\epsilon_x} \sin\theta_l, 0, \dots, 0), l = 1, 2, \dots, L$$

$$x_{L+1} = (0, 0, \sqrt{\epsilon_x} \cos\theta_l, \sqrt{\epsilon_x} \sin\theta_l, 0, \dots, 0), l = 1, 2, \dots, L$$

$$x_{(V-1)L+l} = (0, 0, 0, \dots, \sqrt{\epsilon_x} \cos\theta_l, \sqrt{\epsilon_x} \sin\theta_l), l = 1, 2, \dots, L$$

L - 正交信号的标准正交函数集的选取有许多方法, 只要其满足标准正交基的条件即可。可以看出, 在引入 L - 正交信号之后, 当 $V = M(L = 1)$ 时, 此时 L - 正交信号即为 MFSK 信号, 而当 $V = M/2(L = 2)$ 时, 此时 L - 正交信号即为双正交信号, 而当 $V = 1(L = M)$ 时, 对应于 MPSK 信号。

3 仿真结果及结论

对于我们前述的几种调制信号集, 分别采用 Monte-Carlo 仿真和 N 维数值积分仿真对 DCMC 的信道容量进行了模拟, 限于篇幅, 文中只给出了一维多进制 PAM ($M = 2, 4, 8, 16$) 二维多进制 QAM ($M = 4, 8, 16, 32, 64$) 以及多维多进制 L - 正交信号 ($L = 1, M = V = 2, 4, 8$ 时即正交信号和 $V = 2, L = 4, 8, 16, 32, 64$ 时) 的信道容量仿真结果, 曲线如图 3、图 4 所示。在仿真中, $SNR = E_s/(TN_0W) = 2E_s/(N \cdot N_0) = E_s/N \cdot \sigma^2$, 其中 σ^2 为每一维噪声的方差。

由图中可以看出, 采用 Monte-Carlo 仿真和 N 维数值积分仿真所得到的结果是一致的, 但是 Monte-Carlo 仿真所需时间较长。在 PAM、QAM 的仿真曲线中也同时绘出了相应的波形信道的信道容

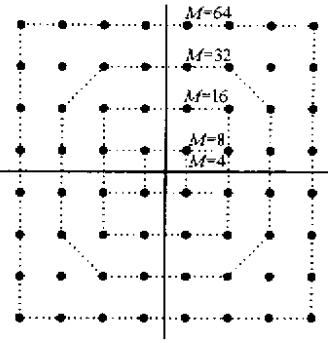


图 2 QAM 的矩形信号星座图
Fig.2 Rectangular signal space

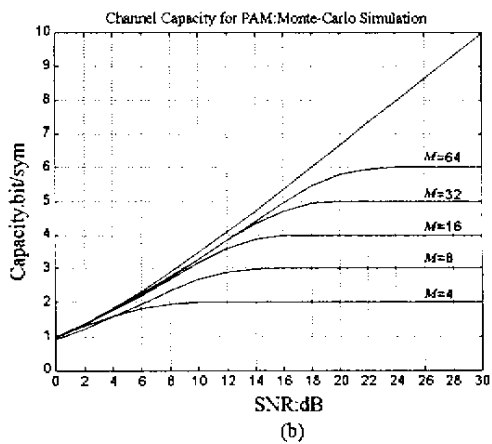
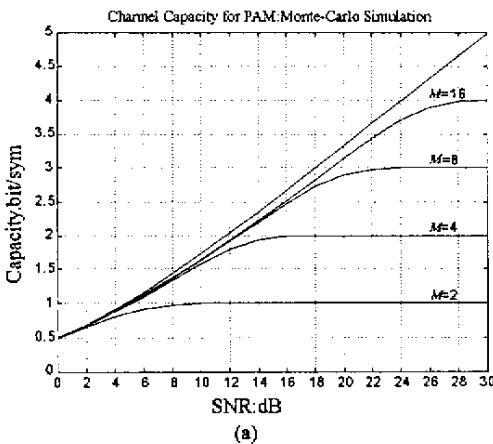


图 3 采用 Monte-Carlo 仿真时不同调制信号集的信道容量 (a)PAM (b)QAM

Fig.3 Channel capacity of different modulation signal sets by the Monte-Carlo simulation (a) PAM ;(b) QAM

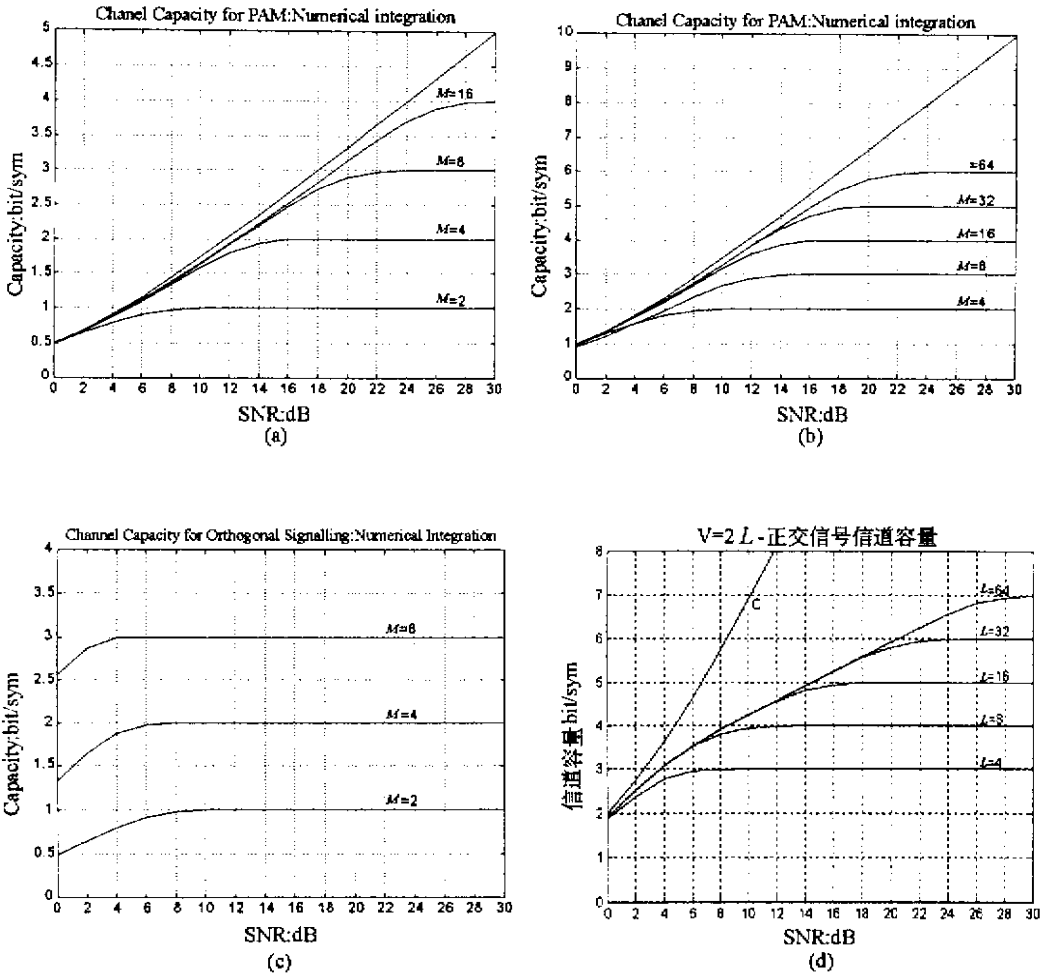


图4 采用 N 重数值积分仿真时不同调制集的信道容量 (a)PAM (b)QAM (c)正交信号 ($L=1$) (d) L -正交信号
 Fig.4 Channel capacity of different modulation signal sets by the $N-D$ numerical integral simulation
 (a) PAM ;(b) QAM ;(c) Orthogonal Signalling ($L=1$);(d) L -orthogonal Signalling

量,即由香农公式给出的极限曲线。在低信噪比时,它们都较好地逼近香农限。值得注意的是,由仿真曲线可以看出,通过扩展信号星座集,可以获得可观的编码增益,这就奠定了另一著名领域——格状编码调制(TCM)技术的基础^[3]。TCM 同样是引入可控的编码冗余以降低误码率,但是其编码冗余是通过扩展信号集来实现的,从而避免了带宽的扩展。通过对多进制多维调制信号集在离散输入连续输出无记忆信道中的信号容量分析,我们得出了两点结论:一是扩展信号集编码相对于未编码调制系统理论上可以获得约 7~8dB 的编码增益;二是通过扩展信号集一倍可以获得几乎全部的编码增益。

参考文献:

[1] 傅祖芸. 信息论基础 [M].北京:电子工业出版社,1989.
 [2] 王新梅,肖国镇. 纠错码——原理与方法 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1991.
 [3] Ungerboeck,G. Channel Coding with Multilevel/Phase Signals [J]. IEEE T-IT ,IF-28(1) 55-67.
 [4] Philip Edward McIlree. Channel Capacity Calculations for M-ary N-Dimensional Signal Sets [D]. February 1995.
 [5] Lindsey W C, Simon M K. L-Orthogonal Signal Transmission and Detection [J]. IEEE Trans. Comm, 1972, COM-20 953-960.
 [6] 冯康. 数值计算方法 [M].北京:国防工业出版社,1972.

