

# 求解分层介质结构空域格林函数的固定实镜像法\*

李晋文,毛钧杰

(国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

**摘要:**空域格林函数的求解是矩量法分析分层介质结构的主要困难,也是关键所在。在离散复镜像技术的基础上,注意到逆问题解的不唯一性,提出了一种新方法——固定实镜像法(FRIM),即在一组空域复镜像(表示为复指数级数和)来拟合谱域格林函数时,根据经典镜像理论给定镜像的实位置,然后用简单的点匹配法来求出相应实镜像的复幅度。该方法避免了复镜像法中用 Prony 法或广义函数束法(GPOF)拟合的复杂计算过程,提高了计算速度,且物理含义也更加明确。文中给出了该方法的基本原理,给出一组数值模拟结果,与复镜像法吻合得很好,证实了该方法的有效性。

**关键词:** 分层介质;格林函数;镜像法

**中图分类号:** TN823.31 **文献标识码:** A

## Fixed Real Image Method (FRIM) for Green's Function of Multilayer Media

LI Jin-wen, MAO Jun-jie

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The computation of Green's function in spatial domain is the key difficulty in solving multilayer structure. According to the nonuniqueness of inverse problem, a novel method based on discrete complex image method (DCIM)—fixed real image method (FRIM) is put forward. According to this method, we use fixed images at real instead of complex locations to approximate the spectral Green's function, the images real locations are selected according to the classic image theory, and the complex amplitudes can be obtained using simple point match method. This method is simpler and faster than the complex image method for avoiding the fitting procedure of Prony or GPOF. A group of computation results are given and validated by DCIM.

**Key words:** multilayer media; Green's function; image method

随着电磁场理论和技术的快速发展,微波集成电路(MIC和MMIC)和微带天线中,越来越多地应用了平面分层介质结构。此外,地球勘探、遥感和电波传播问题中也会大量遇到分层介质结构,分层介质结构问题的求解因此日益受到研究人员的重视。这类问题的标准解法是建立分层介质结构的积分方程,然后用矩量法求解,在这类方法中,空域混合位积分方程与电场积分方程、磁场积分方程和混合积分方程相比积分内核的奇异性较弱,因而受到广泛的重视和应用<sup>[2]</sup>。在该方法中通常采用数值积分计算非常棘手的 Sommerfeld 积分(SI),非常耗时,是空域矩量法的主要计算瓶颈。近年来,业界提出离散复镜像理论<sup>[3]</sup>(DCIM)避免数值积分,受到了广泛重视,并已获一些商业软件应用。

离散复镜像技术首先利用准静近似抽取对应于远谱近场的准动态空域镜像,然后抽取对应近谱远场的表面波,剩余部分归结为复镜像的作用。求复镜像时用 Prony 法或广义函数束(GPOF)等谱估计方法将谱域格林函数抽取后的剩余部分,表示为复指数级数的和,然后利用 Sommerfeld 恒等式可以得到闭合形式解。注意到由谱域格林函数抽取后的剩余部分求复镜像的复位置和复幅度具有不唯一性,在复镜像基础上提出了一种新方法——固定实镜像法(FRIM),即把镜像固定在一组实位置上,镜像的位置由简单镜像理论来确定,只需要解简单的线性方程组就可以求得相应的复幅度。与基于 Prony 和

\* 收稿日期:2002-04-25

作者简介:李晋文(1975—),男,博士生。

GPOF 的复镜像法相比,FRIM 更简单,计算量更小,可以进一步加快空域格林函数的计算,而且保持了相当的计算精度,其物理含义也更加明确。

## 1 分层介质结构的谱域格林函数

对于如图 1 所示的一般平面分层介质结构,第  $n$  层介质的相对介电常数和相对磁导率( $\epsilon_r, \mu_r$ )记为( $\epsilon_n, \mu_n$ ),第  $n$  层的厚度为  $d_n$ ,电或磁良导体平面和半自由空间也算作单独一层。设源点位于第  $i$  层中,场点可以选在任意一层,设在第  $j$  层中。

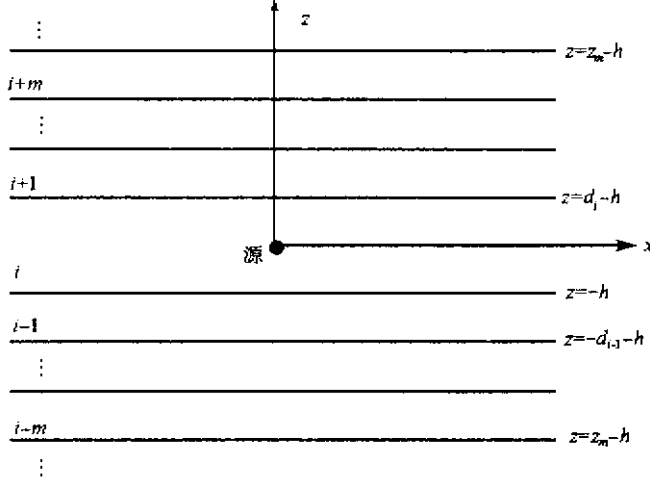


图 1 位于分层介质结构中的源

Fig. 1 The source in multilayer media structure

如图 1 所示的位于分层介质结构中第  $i$  层的源,经过推导不难得到,当场点与源点同在源层(即  $j = i$ )时的谱域并矢格林函数各分量的解析表达式,以下直接给出与水平电偶极子对应的磁矢量位和电标量位的源层谱域格林函数中  $\tilde{G}_{xx}^A$  和  $\tilde{G}_{xx}^q$  的表达式<sup>[4]</sup>

$$\tilde{G}_{xx}^A = \frac{\mu_i}{2jk_{z_i}} [e^{-jk_{z_i}|z|} + A_h^e e^{jk_{z_i}z} + C_h^e e^{-jk_{z_i}z}] \quad (1)$$

$$\tilde{G}_{xx}^q = \frac{1}{2j\epsilon_i k_{z_i}} \left[ e^{-jk_{z_i}|z|} + \frac{k_{z_i}^2 B_h^e + k_i^2 A_h^e}{k_\rho^2} e^{jk_{z_i}z} + \frac{k_{z_i}^2 C_h^e - k_i^2 D_h^e}{k_\rho^2} e^{-jk_{z_i}z} \right] \quad (2)$$

其中  $k_i^2 = k_\rho^2 + k_{z_i}^2$ ,其余各项系数  $A_h^e, B_h^e, C_h^e$  和  $D_h^e$  都是广义反射系数,分别为

$$A_h^e = e^{-jk_{z_i}(d_i - h)} \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i+1} [e^{-jk_{z_i}(d_i - h)} + \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i-1} e^{-jk_{z_i}(d_i + h)}] M_i^{TE, TM} \quad (3)$$

$$B_h^e = e^{-jk_{z_i}(d_i - h)} \tilde{R}_{TM, TE}^{i, i+1} [e^{-jk_{z_i}(d_i - h)} - \tilde{R}_{TM, TE}^{i, i-1} e^{-jk_{z_i}(d_i + h)}] M_i^{TM, TE} \quad (4)$$

$$C_h^e = e^{-jk_{z_i}h} \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i-1} [e^{-jk_{z_i}h} + \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i+1} e^{-jk_{z_i}(2d_i - h)}] M_i^{TE, TM} \quad (5)$$

$$D_h^e = e^{-jk_{z_i}h} \tilde{R}_{TM, TE}^{i, i-1} [-e^{-jk_{z_i}h} + \tilde{R}_{TM, TE}^{i, i+1} e^{-jk_{z_i}(2d_i - h)}] M_i^{TM, TE} \quad (6)$$

式中

$$M_i^{TE, TM} = [1 - \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i+1} \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i-1} e^{-jk_{z_i}2d_i}]^{-1} \quad (7)$$

$$\tilde{R}_{TE, TM}^{i+1, i} = \frac{R_{TE, TM}^{i+1, i} + \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i-1} e^{-jk_{z_i}2d_i}}{1 - R_{TE, TM}^{i, i+1} \tilde{R}_{TE, TM}^{i, i-1} e^{-jk_{z_i}2d_i}} \quad (8)$$

其中  $R$  和  $\tilde{R}$  分别表示分层界面上的 Fresnel 系数和广义反射系数。对于场点所在层  $j < i$  时的场,若用  $A_j^-$  和  $A_{j+1}^-$  分别表示第  $j$  层( $j = i - m$ )和第  $j + 1$  层中下行波的幅度,  $T$  为传输系数,  $z_m$  等于第  $i$  层下底板和第  $j$  层下底板之间的距离,则  $A_j^-$  和  $A_{j+1}^-$  存在递推关系

$$A_j^- = A_{j+1}^- \frac{T_{j+1, j} e^{-jk_{z_{j+1}}(h + z_{-m+1})}}{1 - R_{j, j+1} \tilde{R}_{j, j-1} e^{-jk_{z_j}2d_j}} \quad (9)$$

类似地,对于  $j > i$  ( $j = i + m$ ) 时,第  $j$  层内上行波的幅度为

$$A_j^+ = A_{j-1}^+ \frac{T_{j-1,j} e^{-k_{z_{j-1}} - k_{z_j}} \chi_{z_{m+1} + d_i - h}}{1 - R_{j,j-1} \tilde{R}_{j,j+1} e^{-jk_{z_j} 2d_j}} \quad (10)$$

根据(9)(10)两个递推关系式即可得到位于第  $i$  层内的源在第  $j$  层内产生的场。

## 2 固定实镜像法求闭式空域格林函数

空域格林函数是谱域格林函数的 Hankel 变换

$$G^{A,qe} = \frac{1}{4\pi} \int_{SIP} dk_\rho k_\rho H_0^{(2)}(\chi_{k_\rho \rho}) \tilde{G}^{A,qe}(k_\rho) \quad (11)$$

该积分也就是通常所说的 Sommerfeld 积分(以下简称 SI), $G$  和  $\tilde{G}$  分别为空域和谱域内的格林函数, $H_0^{(2)}$  为 0 阶第二类 Hankel 函数,SIP 表示 SI 路径。将谱域格林函数  $\tilde{G}$  表示为复指数的形式,则可以利用 Sommerfeld 恒等式

$$\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{1}{2j} \int_{SIP} dk_\rho k_\rho H_0^{(2)}(\chi_{k_\rho \rho}) \frac{e^{-jk_z |z|}}{k_z} \quad (12)$$

其中

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2} \quad (13)$$

即可得到积分的解析表达式,即得到闭合形式的空域格林函数。至此,主要问题转为将谱域格林函数表示为复指数形式。

为方便说明,首先将谱域格林函数写为统一形式

$$\tilde{G} = A \frac{F}{2jk_{zi}} \quad (14)$$

固定实镜像法与离散复镜像法同样,需要首先从谱域格林函数中抽取准静态项和表面波项。对于源点和场点处于同层的情况,如(1)式中直接利用 Sommerfeld 恒等式提取首项记作  $F_{pr}$ ,则

$$F_{pr} = e^{-jk_{zi} |z|} \quad (15)$$

准静态项为  $k_\rho \rightarrow \infty$  (即频率很低趋于 0)时所对应的贡献,记作  $F_{st}$ ;第二步是从  $F$  中抽取表面波项,抽取后将使积分内核变得光滑。表面波贡献对应于积分内核在  $k_\rho$  平面内极点的留数

$$F_{sw} = 2jk_{zi} \sum_i \frac{2k_{\rho i} \text{Res}_i}{k_\rho^2 - k_{\rho i}^2} \quad (16)$$

式中  $\text{Res}_i$  表示极点  $k_{\rho i}$  的留数。经过以上过程,谱域格林函数可写为

$$\tilde{G} = A \frac{F - F_{pr} - F_{st} - F_{sw}}{2jk_{zi}} \quad (17)$$

在离散复镜像法中,最后一步是求取复镜像,即将  $F - F_{pr} - F_{st} - F_{sw}$  用 Prony 法或 GPOF 法表示为复指数级数的和,即

$$F - F_{pr} - F_{st} - F_{sw} = \sum_{i=1}^N a_i e^{-jk_{zi} b_i} \quad (18)$$

其中  $N$  为复镜像的数目。 $a_i$  和  $b_i$  分别为镜像的幅度和位置,都是复数;求出  $a_i$  和  $b_i$  然后就可以利用 Sommerfeld 恒等式得到空域格林函数的闭合形式解。

注意到由(18)式求复幅度  $a_i$  和复位置  $b_i$ ,所得到的解是不惟一的。因此提出了固定实镜像法(FRIM),即在  $k_{zi}$  平面上选取  $N$  个固定的实镜像,即

$$F - F_{pr} - F_{st} - F_{sw} = \sum_{i=1}^N a_i' e^{-jk_{zi} b_i'} \quad (19)$$

与(18)式不同的是,这里  $b_i'$  为实数,且已事先确定;这样把  $N$  个点代入(19)式的两边就可以得到关于  $a_i'$ ,  $i = 1, \dots, N$  的  $N$  个方程,求解即可得复幅度  $a_i'$ 。这样,在固定实镜像法中,避免了复镜像法中复杂的 Prony 法或 GPOF 法计算,同时采样点数也只会和选取的镜像数目一样,只采几点就足够了,与复镜

像法相比要少很多 ;另外 ,固定实镜像法在选取镜像的位置上可以有很大的随意性 ,而复镜像法的采样点必须选在  $k_z$  平面上的某些固定路径上 ;在本文中 ,是根据经典镜像理论来选取镜像的位置 ,物理意义非常明确。

### 3 数值结果

为了验证固定镜像法的有效性 ,为方便比较 ,所取实例为与文献 3 完全一样的微带结构 :介质厚度  $h = 1\text{mm}$  ,介质的介电常数为  $\epsilon_r = 12.6$  ;水平电偶极子源位于介质层与上半空间的分界面上 ,场点也选取在同一平面上 ,这是格林函数收敛最慢的情况。

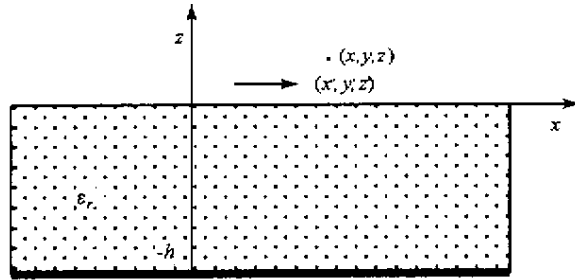


图 2 开放式微带结构

Fig.2 The open microstrip structure

用固定实镜像法 (FRIM) 计算了两种最常用的格林函数  $G_{xx}^A$  和  $G_x^{q_e}$  ,  $f = 10\text{GHz}$ 。计算时选取了 4 个镜像 ,实镜像的位置分别选取为 :  $b_i = -2ih$  ,  $i = 1, \dots, 4$ 。图 3 和图 4 分别给出了  $G_{xx}^A$  和  $G_x^{q_e}$  的模拟结果 ,并与复镜像法 (DCIM) 的计算结果进行了比较 ,不难看出两条曲线符合得相当一致 ,两者数值上最大差别小于 2% ,证实了该方法的有效性。

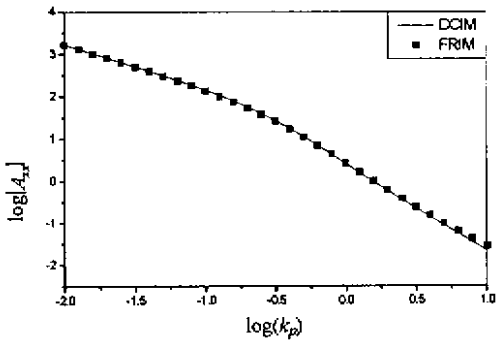


图 3 矢量位格林函数  $G_{xx}^A$  的幅值

Fig.3 The amplitude of vector potential  $G_{xx}^A$

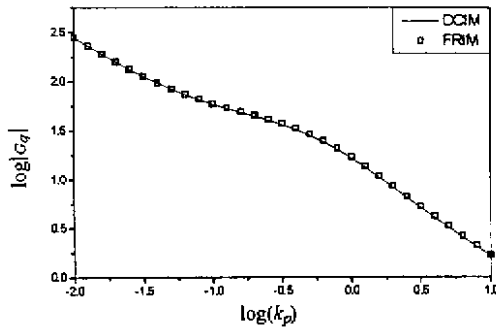


图 4 标量位格林函数  $G_x^{q_e}$  的幅值

Fig.4 The amplitude of scalar potential  $G_x^{q_e}$

### 参考文献 :

- [ 1 ] Itoh T. Spectral Domain Immitance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines[ J ]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 1980 , 28 : 733 - 736.
- [ 2 ] Mosig J R. Arbitrarily Shaped Microstrip Structures and Their Analysis with a Mixed Potential Integer Equation[ J ]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 1988 , 36 : 314 - 323.
- [ 3 ] Chow Y L , Yang J J , Fang D G , Howard G E. Closed Form Green 's Function for Thick Microstrip Substrat[ J ]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 1991 , 39 : 588 - 593.
- [ 4 ] Michalski K A , Mosig J R. Multilayered Media Green 's Functions in Integral Equation Formulations[ J ]. IEEE Trans. Antennas Propagat. , 1997 , 45 : 508 - 519.

