文章编号:1001-2486(2002)05-0093-06

具有随机寿命的二维期权定价*

冯广波[1],陈伟芳[2]

(1. 中南大学铁道校区科研所,湖南 长沙 410075;
2. 国防科技大学航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:由于期权合约在到期日之前可能被终止及标的资产的价格可能会因重大信息的到达而发生跳跃,文中在假设合约被终止的风险与重大信息导致的价格跳跃风险皆为非系统的风险情况下,应用无套利资本资产定价及 Feynman-kac 公式,首先研究了标的资产服从连续扩散过程和跳—扩散过程具有随机寿命的交换期权定价,得到相应的定价公式;然后,研究了标的资产服从跳—扩散过程及利率随机变化具有随机寿命的期权定价,得到相应的定价公式。

关键词:随机寿命;跳—扩散过程;期权;风险

中图分类号:F830.91;O211.9 **文献标识码**:A

Two Dimensional Option Pricing with Stochastic Life

FENG Guang-bo[1],CHEN Wei-fang[2]

(1. Research Department, Railway Campus, Central South University, Changsha 410075, China;
2. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Option contracts are probably stopped before expire dates and important events may cause jump of underlying assets price. The paper assumes that the two kinds of risks,caused by stochastic stopping and the jump of price, are nonsystematic. By means of no arbitrage capital asset pricing and Feynman-kac formula, it first studies stochastic lives exchange options pricing with the underlying assets obeying continuous diffusion processes and the underlying assets obeying jump-diffusion processes, and obtains corresponding pricing formulas. And then, it studies the stochastic life option pricing with the underlying asset obeying jump-diffusion process and interest rate being stochastic, and oblains corresponding pricing formula.

Key words: stochastic life; jump-diffusion process; option; risk

通常认为期权定价问题都有确定的到期日,但期权合约在到期日之前由于种种原因可能被终止,文献[1]讨论一类服从连续扩散过程的具有随机寿命未定权益定价并推广了 Black-scholes 公式。现实中,一方面,标的资产价格往往受到某些重大信息的影响发生价格跳跃,例如文献[3];另一方面,利率也可能是随机变化的。因此,本文利用无套利资本资产定价及文献[2]中的 Feynman-kac 公式,首先研究了连续扩散过程具有随机寿命的交换期权定价,接着探讨了跳—扩散过程的具有随机寿命的交换期权定价,最后又研究了利率随机变化、标的资产服从跳—扩散过程具有随机寿命的期权定价问题,推广了文献[4,5],得到了更切实际的结果。

1 具有随机寿命的交换期权的定价

1.1 股票价格服从连续对数正态分布的定价

(1) 服从连续对数正态分布的股票价格模型

假设金融市场中有两种股票 S_1,S_2,其价格分别满足下面的随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i \mathrm{d}t + \sigma_i \mathrm{d}z_i(t) \tag{1}$$

$$i = 1,2$$

* 收稿日期:2002-04-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(19871006/A010110)
作者简介:冯广波(1969—),男,经济师,博士生。

其中 μ_i，σ_i^2 分别为股票的期望收益率，股票收益率方差，且为常数；$z_i(t)$ 为标准布朗运动（$i=1,2$），ρ 为 $z_1(t)$ 与 $z_2(t)$ 的相关系数。

假设金融市场的另一种资产，即无风险债券 $B(t)$，满足

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}B(t) &= B(t)\,r\,\mathrm{d}t \\
B(0) &= 1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

在风险中性世界中，股票的价格可以表示成如下形式：

$$
\frac{S_i(t)}{S_i(0)} = \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sigma_i z_i(t)\right] \tag{3}
$$

$$i = 1,2$$

(2) 具有随机寿命的交换期权满足的偏微分方程

假设期权的到期日为 T，定价日 t 时的价格 $V(S_1,S_2,t)$，其中 $V(S_1,S_2,t)$ 关于 S_1，S_2 二阶可导连续，关于 t 一阶可导。期权在到期日 T 之前被终止的时刻 u 服从负指数分布，其参数为 λ_1（常数），该负指数分布与 $z_i(t)$（$i=1,2$）是相互独立的；期权在被终止时刻 u 时的损益为 $[(S_1(u)-S_2(u))^+ - V(S_1,S_2,u)]$。这里假设期权被终止的风险属于非系统风险。

定理1 具有随机寿命的交换期权，在定价日 t 时刻的无套利价格 $V(S_1,S_2,t)$，应满足下面的随机偏微分方程：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \dfrac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \\
\quad + rS_1 \dfrac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \dfrac{\partial V}{\partial S_2} - (r+\lambda_1)V + \lambda_1 (S_1(t) - S_2(t))^+ = 0 \\
V(S_1,S_2,T) = (S_1(T) - S_2(T))^+
\end{cases}
\tag{4}
$$

证明 对 $V(S_1,S_2,t)$ 来说，由于它关于 S_1，S_2 是二阶可导连续，关于 t 是一阶可导，于是由 Ito 公式有：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{V} = &\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}S_1^2\sigma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho S_1 S_2 \sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}S_2^2\sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right. \\
&\left. + \mu_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2}\right) / V \mathrm{d}t \\
&+ \sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} / V \mathrm{d}z_1 + \sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} / V \mathrm{d}z_2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

又因为期权在 t 时刻被终止的损益为

$$\lambda_1[(S_1 - S_2)^+ - V(S_1,S_2,t)]\mathrm{d}t$$

故期权在 t 时刻的收益率 μ_v 为

$$
\begin{aligned}
\mu_v = &\left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}S_1^2\sigma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho S_1 S_2 \sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} + \frac{1}{2}S_2^2\sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}\right. \\
&\left. + \mu_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + \mu_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \lambda_1[(S_1 - S_2)^+ - V]\right\} / V
\end{aligned}
\tag{6}
$$

下面考虑一投资组合 Π。

在该投资组合中包括无风险债券 B，股票 S_1，股票 S_2 及期权 V，其比例分别为 π_1，π_2，π_3，π_4

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \tag{7}$$

在组合 Π 中，$\dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\Pi}$ 的随机项为

$$
\begin{aligned}
&\left(\pi_2\sigma_1 + \pi_4\sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} / V\right)\mathrm{d}z_1 \\
&+ \left(\pi_3\sigma_2 + \pi_4\sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} / V\right)\mathrm{d}z_2
\end{aligned}
$$

选取 π_2'，π_3'，π_4' 使得

$$\pi_2'\sigma_1 + \pi_4'\sigma_1 S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} / V = 0 \tag{8}$$

$$\pi_3'\sigma_2 + \pi_4'\sigma_2 S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} / V = 0 \tag{9}$$

由于期权在到期日 T 之前被终止的风险假设为非系统风险以及投资组合为无套利的,因此有:

$$\pi_1' r + \pi_2'\mu_1 + \pi_3'\mu_2 + \pi_4'\mu_v = 0 \tag{10}$$

这样把(6)~(9)代入(10)式,可以得到具有随机寿命的交换期权满足的偏微分方程(4)式。

(3) 具有随机寿命的交换期权的定价公式

定理 2 定价日 t 时刻的无套利价格

$$V(S_1, S_2, t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1(T-t)} M(S_1, S_2, T-t, v^2) + \lambda_1 \int_t^T \mathrm{e}^{-\lambda_1(u-t)} M(S_1, S_2, u-t, v^2)\,\mathrm{d}u \tag{11}$$

其中,$M(S_1, S_2, \tau, v^2) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2)$;

$N(\cdot)$为标准正态分布函数,$d_1 = \dfrac{\ln(S_1 k_2) + \frac{1}{2} v^2 \tau}{v\sqrt{\tau}}$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{\tau}$$

$$v^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

证明 对偏微分方程(4)应用 Feynman-kac 公式得:

$$\begin{aligned}
V(S_1, S_2, t) = {} & \mathrm{e}^{-(r+\lambda_1)(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{S_1 \exp[(r - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t) + \sigma_1\sqrt{T-t}x] \\
& - S_2 \exp[(r - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2)(T-t) + \sigma_2\sqrt{T-t}y]\}^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(x+y)^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
& + \lambda_1 \int_t^T \mathrm{e}^{-(r+\lambda_1)(u-t)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \{S_1 \exp[(r - \tfrac{1}{2}\sigma_1^2)(u-t) + \sigma_1\sqrt{u-t}x] \\
& - S_2 \exp[(r - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2)(u-t) + \sigma^2\sqrt{u-t}y]\}^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(x+y)^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\
= {} & \mathrm{e}^{-\lambda_1(T-t)} M(S_1, S_2, T-t, v^2) + \lambda_1 \int_t^T \mathrm{e}^{-\lambda_1(u-t)} M(S_1, S_2, u-t, v^2)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

1.2 股票价格服从跳—扩散过程的定价

股票价格服从跳—扩散过程的模型

$$\frac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)} = (\mu_i - \lambda_2 k_i)\mathrm{d}t + \sigma_i \mathrm{d}z_i(t) + \mathrm{d}q(t) \qquad i = 1, 2 \tag{12}$$

其中 $q(t)$为参数为 λ_2 且与 $z_i(t)$($i = 1, 2$)相互独立的 Possion 过程。

$k_i = \varepsilon(Y_i - 1)$,其中($Y_i - 1$)为假如 Possion 事件发生时股票价格的相对增长且 Y_i 为随机变量,ε 为关于 Y_i 的期望算子;参数为 λ_1 的负指数分布与 $z_i(t)$($i = 1, 2$)、$q(t)$相互独立。

说明:σ_i^2($i = 1, 2$)为无跳跃发生情况下的方差。

在风险中性世界中,股票价格可表示为

$$\frac{S_i(t)}{S_i(0)} = \exp[(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)\tau + \sigma_i z_i(t)]\, Y_i(n)$$

其中 $Y_i(n) = Y_{i1} Y_{i2} \cdots Y_{in}$,$n$ 为服从参数为$\lambda_2 t$ 的 Possion 分布,ε_n 为关于 $Y_i(n)$的期望算子,$i = 1, 2$,其余的描述同 1.1 的(1)、(2)。

定理 3 具有随机寿命的交换期权的价格 $V(S_1, S_2, t)$所满足的偏微分方程:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \\
& + (r - \lambda_2 k_1) S_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + (r - \lambda_2 k_2) S_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} - (\lambda_1 + r) V
\end{aligned}$$

$$+\lambda_2\varepsilon[V(S_1Y_1,S_2Y_2,t)-V(S_1,S_2,t)]$$
$$+\lambda_1(S_1-S_2)^+=0 \tag{13}$$

其终值条件 $V(S_1,S_2,T)=[S_1(T)-S_2(T)]^+$

证明 类似定理 1。

定理 4 具有随机寿命,且资产服从跳—扩散过程的交换期权的价格 $V(S_1,S_2,t)$为:

$$V(S_1,S_2,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda_2\tau)^n}{n!}\varepsilon_n(M(A,B,\tau,v^2))$$
$$+\lambda_1\int_t^T e^{-\lambda_1\tau_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2\tau_1)^m}{m!}\varepsilon_m(M(C,D,\tau_1,v^2))du \tag{14}$$

其中
$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2,\tau=T-t,\tau_1=u-t$$
$$A=S_1Y_1(n)e^{-\lambda_2k_1\tau},C=S_1Y_1(m)e^{-\lambda_2k_2\tau_1}$$
$$B=S_2Y_2(n)e^{-\lambda_2k_2\tau},D=S_2Y_2(m)e^{-\lambda_2k_2\tau_1}$$

证明 对(13)式应用 Feynman-Kac 公式得

$$V(S_1,S_2,t)=e^{-(r+\lambda_1)(T-t)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_2(T-t)}\cdot\frac{[\lambda_2(T-t)]^n}{n!}$$
$$\varepsilon_n\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{S_1\exp[(r-\lambda_2k_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)(T-t)+\sigma_1\sqrt{T-t}x]Y_1(n)\right.$$
$$-S_2\exp[(r-\lambda_2k_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2)(T-t)+\sigma_2\sqrt{T-t}y]Y_2(n)\}^+$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-(x+y)^2)\}dydx\right\}$$
$$+\lambda_1\int_t^T e^{-(\lambda_1+r)(u-t)}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\lambda_2(u-t)}\cdot\frac{[\lambda_2(u-t)]^m}{m!}$$
$$\varepsilon_m\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{S_1\exp[(r-\lambda_2k_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2)(u-t)+\sigma_1\sqrt{u-t}x]Y_1(m)\right.$$
$$-S_2\exp[(r-\lambda_2k_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2)(u-t)+\sigma_2\sqrt{u-t}y]Y_2(n)\}^+$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+y)^2}dydx\right\}du$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\cdot\frac{(\lambda_2\tau)^n}{n!}\varepsilon_n(M(S_1Y_1(n)e^{-\lambda_2k_1\tau},S_2Y_2(n)e^{-\lambda_2k_2\tau},\tau,v^2))$$
$$+\lambda_1\int_t^T e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau_1}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2\tau_1)^m}{m!}$$
$$\cdot\varepsilon_m(M(S_1Y_1(m)e^{-\lambda_2k_1\tau},S_2Y_2(m)e^{-\lambda_2k_2\tau_1},\tau_1,v^2))du$$

2 具有随机寿命且利率随机变化的欧式买权定价

假设金融市场有两种资产,一种债券 $B(t)$满足

$$\frac{dB(t)}{B(t)}=\mu_1dt+\sigma_1dz_1(t), \tag{15}$$
$$0\leqslant t\leqslant T,B(T)=1$$

令 $A(t)=B(t)X$(X 为期权执行价格)

另一种为股票 $S(t)$满足:

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=(\mu_2-\lambda_2k)dt+\sigma_2dz_2(t)+dq(t) \tag{16}$$

其中,μ_1,σ_1 分别为债券价格的增长率,债券价格的波动率;μ_1 为随机变量,σ_1 为常数;μ_2,σ_2^2 分别为股票的价格的增长率,无跳跃发生时股票价格增长率的方差,μ_2,σ_2 为常数,$z(t)$($i=1$, 2)为标准布朗运

动，$q(t)$为参数为λ_2且与$z_i(t)(i=1,2)$相互独立的Possion过程;$k=\varepsilon(Y-1)$，其中Y为Possion事件发生时的股票价格的相对增长，Y为随机变量，ε为关于Y的期望算子，定义ε_n为关于$Y(n)$的期望算子，$Y(n)=Y_1Y_2\cdots Y_n$，n为服从参数$\lambda_2 t$为的Possion分布。

假设期权的到期日为T，定价日t时刻的期权价格为$V(S,A,t)$，$V(S,A,t)$关于S、A二阶可导连续，关于t一阶可导。期权在到期日前被终止的时刻u服从参数为λ_1的负指数分布，在u时刻期权的损益为$\lambda_1[(S(u)-XB(u))^+-V]\mathrm{d}u$。该负指数分布与$q(t)$、$z_i(t)(i=1,2)$相互独立。

假定期权在到期日前被终止的风险与跳跃风险皆为非系统风险。

定理5 具有随机寿命且利率随机的欧式买权在t时刻的无套利价格满足的偏微分方程为:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_1^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\sigma_1\sigma_2SA\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial A}+\frac{1}{2}\sigma_2^2A^2\frac{\partial^2 V}{\partial A^2}\\&-\lambda_2kS\frac{\partial V}{\partial S}-\lambda_1V+\lambda_1(S-A)^+\\&+\lambda_2\varepsilon[V(SY,A,\tau)-V(S,A,\tau)]=0\end{aligned}\tag{17}$$

终值条件为:$V(S,A,T)=(S_T-X)^+$

证明 对$V(S,A,t)$应用Ito公式有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V=&[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\rho\sigma_1\sigma_2SA\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial A}+\frac{1}{2}\sigma_1^2A^2\frac{\partial^2 V}{\partial A^2}\\&+\lambda(\mu_2-\lambda_2k)S\frac{\partial V}{\partial S}+\mu_1A\frac{\partial V}{\partial A}\\&+\lambda_2\varepsilon(V(SY,A,t)-V(S,A,T))]\mathrm{d}t\\&+\sigma_1A\frac{\partial V}{\partial A}\mathrm{d}z_1+\sigma_2S\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}z_2\\=&\hat{\mu}\mathrm{d}t+\sigma_1A\frac{\partial V}{\partial A}\mathrm{d}z_1+\sigma_2S\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}z_2\end{aligned}$$

期权在t时刻被终止产生的损益为$\lambda_1[(S-XB)^+-V]\mathrm{d}t$

故期权在t时刻的增长率μ_v为

$$\mu_v=\hat{\mu}/V+\lambda_1[(S-XB)^+-V]/V$$

下面考虑一投资组合:

设投资组合中包含有债券A，股票，期权，其比例分别为π_1,π_2,π_3，且

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=0\tag{18}$$

投资组合的随机项为:

$$(\pi_1\sigma_1+\pi_3\sigma_1A\frac{\partial V}{\partial A})\mathrm{d}z_1+(\pi_2\sigma_2+\pi_3\sigma_2S\frac{\partial V}{\partial S})\mathrm{d}z_2$$

选取π_1',π_2',π_3'消除组合的随机项，即

$$\pi_1'\sigma_1+\pi_3'\sigma_1A\frac{\partial V}{\partial A}/V=0\tag{19}$$

$$\pi_2'\sigma_2+\pi_3'\sigma_2S\frac{\partial V}{\partial S}/V=0\tag{20}$$

由于期权被终止的风险与跳跃风险皆为非系统风险，因此，若该组合为无套利的，则

$$\pi_1'\mu_1+\pi_2'\mu_2+\pi_3'\mu_v=0\tag{21}$$

由(18)~(21)式可以得到

$$\frac{\mu_1-\mu_v}{\mu_2-\mu_1}=\frac{A\frac{\partial V}{\partial A}-V}{V}\tag{22}$$

$$[A\frac{\partial V}{\partial A}-V]/V=S\frac{\partial V}{\partial S}/V\tag{23}$$

式(22)与(23)联合及把μ_v代入即得(17)式。

定理6 具有随机寿命且利率是随机变化的服从跳—扩散过程的欧式买权的价格 $V(S,B,t)$：

$$V(S,B,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\frac{(\lambda_2\tau)^n}{n!}\varepsilon_n[M(SY(n)e^{-\lambda_2 k\tau},A,\tau)]$$

$$+ \lambda_1\int_t^T e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\tau}\frac{(\lambda_2\tau_1)^m}{m!}\varepsilon_m[M(SY(m)e^{-\lambda_2 k\tau_1},A,\tau_1)]du$$

其中

$$\tau = T-1,\tau_1 = u-t;$$

$$M(C,A,\hat{\tau}) = CN(d_1) - AN(d_2);$$

$$d_1 = \frac{\ln(C/A)+\frac{1}{2}v^2\hat{\tau}}{v\sqrt{\hat{\tau}}},\quad d_2 = d_1 - v\sqrt{\hat{\tau}};$$

$$v^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2。$$

证明 略。

说明 由于利率是随机的，即：

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz_1(t) \qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

$$B(T) = 1$$

(17)式与(13)式比较，可以发现：若把 XB 看成一种资产，(17)式是(13)式中 S_2 服从连续布朗运动，且利率为0的特殊情况。

参考文献：

[1] Jennergren P L. A Class of Option with Stochastic Life and an Extention of the Black - scholes Formula [J]. European Journal of operational Research, 1996, 91:229 - 234.

[2] Peng S A. A Nonlinear Feynman - kac Formula and Application [M]. World Scientific. Singapore, 1992:173 - 184.

[3] Merton R C. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3:125 - 144.

[4] Black F, Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81:637 - 659.

[5] Margrabe W. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another[J]. Journal of Finance, 1978(March) 33, 177 - 186.