

元胞法模拟非线性弹性层合材料中的应力波*

徐明利,张若棋,张光莹

(国防科技大学理学院,湖南长沙 410073)

摘要 元胞法(Method of Cell)是在有效刚度理论的基础上发展起来的新方法,可以用来构造具有周期性结构单元的材料的本构,也可以用来模拟应力波在材料中的传播问题,尤其是具有分层结构的材料。本文中给出两种常见的初值条件,并利用该方法模拟了非线性弹性材料的动态响应,研究了波在该层合材料中的振荡现象。

关键词 元胞法;应力波;动态响应;非线性弹性

中图分类号 :O347.4 **文献标识码** :A

Simulation of the Stress Wave in Laminated Nonlinear Materials with MOC

XU Ming-li, ZHANG Ruo-qi, ZHANG Guang-ying

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract : The method of cell, based upon the effective stiffness theory, can be applied to construct the constitutive equations of materials with periodical structure, especially laminated materials, and simulate the propagation of stress wave. In this paper, two kinds of initial conditions are listed for the simulation of dynamic response of nonlinear elastic materials according to this method, and the oscillations of stress wave in laminated materials are researched.

Key words : method of cell; stress wave; dynamic response; nonlinear elasticity

随着复合材料的应用越来越广泛,研究复合材料动态响应方面的数值模拟方法日益重要。在各种数值模拟方法中,比较理想的方法是能从细观力学角度把实际的复合材料等效成具有细观结构的均匀连续介质,从而能反映复合材料的细观结构对其宏观响应的重要影响。MOC(Method of Cell)方法便是其中一种新方法。MOC方法最初被用来从细观角度构造复合材料的本构关系,其基本思想是引入代表性体元(Representative Volume Element, RVE),它在空间的周期性层叠可构成宏观上等价的均匀连续复合材料。

MOC方法是由众多研究者的共同努力而逐步发展起来的。Sun、Achenbach等提出了有效刚度理论(Effective Stiffness Theory, EST)^[1]并提出了将位移在层合材料的各分层内作有限阶展开的观念,可以近似描述弹性层合复合材料的宏观动态响应。Drumheller、Bedford应用EST来确定弹性层合材料内的动态位移及应力^[2]并建立了用高阶展开式描述RVE动态响应的理论公式,以自洽的方式扩展了位移连续条件,并引进了应力连续条件,将应力及位移边界条件表达成与该理论相符合的形式。他们的主要贡献是形成了平滑处理(Smoothing Operation)的均匀化技术^[3],通过该手段,可以从RVE的动态响应构造等效的均匀连续模型。

Aboudi在上述基础上提出元胞法^[4],将动量守恒关系转化为按元胞平均的应力矩方程,并将边界条件、位移和应力连续条件、运动方程和材料的本构关系相结合,建立起位移展开式中的元胞系数的封闭方程组。MOC方法最初被用来从细观角度构造复合材料的本构关系,其基本思想是引入代表性体元RVE,它在空间的周期性层叠可构成宏观上等价的均匀连续复合材料。这种思想在处理具有周期结构的复合材料中是常见的。近几年,Clements等人用MOC方法模拟飞片打靶问题^[5],取得了与实验相符

* 收稿日期:2002-04-11

基金项目:冲击波物理与爆轰物理国家级重点实验室基金资助(97JS752.2KG0107)

作者简介:徐明利(1973—)男,博士生。

的结果。这为研究冲击波在层合材料中传播问题提供了一种新的数值计算方法。我们将这种方法用于研究层合材料中弹性应力波的传播规律。

1 元胞法的基本原理^[5,6]

1.1 基本理论

Aboudi 等最初考虑的是由两种材料周期性层叠而成的层合材料,每相邻两薄层组成一个元胞 (cell),组成元胞的每一薄层称为亚元胞 (subcell)。而实际上薄层不一定具有周期性,更为一般的做法是,直接将每一薄层作为一个元胞 (cell),用 P 标记,其厚度为 d ,密度为 ρ 。对于平面波沿垂直于层面方向 x_1 轴传播的情况,在每个元胞内引进局部坐标系 \bar{x}_p 。 \bar{x}_p 的原点位于各元胞的中心,并与 x_1 轴同向,各元胞的中心位置记为 $x_1^{(P)}$,如图 1 所示。

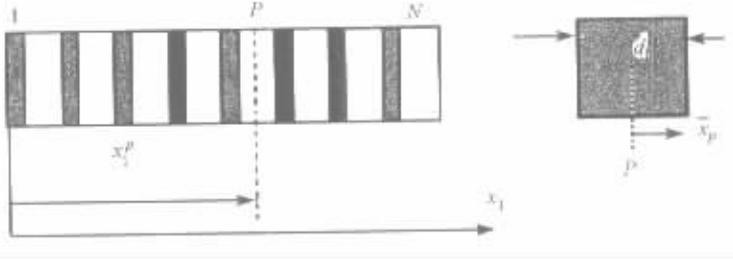


图 1 层合材料结构示意图

Fig.1 Schematic of laminated system

用 MOC 方法研究层合材料的力学性能和动态响应,首先将元胞内的位移场沿坐标轴作关于 \bar{x}_p 的 Legendre 多项式展开^[4],由于层合材料具有周期性结构,仅取第 P 个元胞进行分析:

$$u_1^{(P)}(\bar{x}_p, t) = \sum_{i=0}^N U_i^{(P)} P_i(2\bar{x}_p/d_p) \quad (1)$$

$$u_2^{(P)} = 0, u_3^{(P)} = 0 \quad (2)$$

其中 d_p 是元胞 P 的厚度, $U_i^{(P)}$ ($i=0, 1, 2$) 是元胞系数。研究表明^[5],一阶 MOC 方法只能定性地反映元胞的动态响应。理论上,展开阶次愈高,愈精确,但数学上更为烦琐,二、三阶 MOC 方法已能较细致地描述元胞的动态响应,因此将 $u_1^{(P)}$ 展开至二阶是合适的。

为确定元胞系数,还需要引入相邻元胞界面上的位移和应力连续性条件,以及各个元胞的运动方程。

$$\frac{d}{dt} [\sigma_{11}^{(P)}(\bar{x}_p, t) + q^{(P)}(\bar{x}_p, t)] \nu \partial \bar{x}_p = \rho_p \dot{u}_1^{(P)}(\bar{x}_p, t) \quad (3)$$

对于元胞 P , ρ_p 是密度, $\sigma_{11}^{(P)}$ 是 x_1 轴向应力(为方便计,以下省去表示轴向的下标), $q^{(P)}$ 是人工粘性,定义如下:

$$q^{(P)}(\bar{x}_p, t) = \eta_p d_p \sqrt{E_p \rho_p} \epsilon^{(P)}(\bar{x}_p, t) \quad (4)$$

其中粘性系数 η_p 的量级为 10^{-2} 左右,将 (3) 式两边乘以 $(\bar{x}_p)^m$ 并对 \bar{x}_p 积分,取 $m=0, 1, 2$,不难得到在元胞层界面处的近似动量守恒方程^[6]。

MOC 方法处理层合材料的动态响应问题,理论上适用任意形式的本构方程,本文中主要考虑的是非线性弹性本构^[4]。

$$\sigma^{(P)}(\bar{x}_p, t) = E_p \epsilon^{(P)}(\bar{x}_p, t) + \frac{1}{2} E_p' [\epsilon^{(P)}(\bar{x}^{(a)}, t)]^2 \quad (5)$$

E_p, E_p' 是弹性模量,其中 E_p 与 x_1 轴向的纵波速度关系为 $C_L^P = \sqrt{E_p/\rho_p}$ 。

1.2 求解方法

位移作二阶展开后,每个元胞的位移包含 3 个元胞系数 $U_i^{(P)}$ ($i=0, 1, 2$)。确定了这些系数就可以得到任意时刻的位移,由此可以求得应变和粒子速度,再利用非线性弹性本构关系可求出应力。因此,

MOC方法的关键是求解元胞系数。由元胞 P 与两个相邻元胞的界面上的应力、位移连续性条件,及元胞 P 的近似动量守恒方程,可组成求解 N 个元胞的 $3N$ 个元胞系数的封闭方程组,在适当的边界条件和初始条件下可以唯一确定位移展开式中的元胞系数。将这 $3N$ 个方程按一定顺序写成矩阵形式,便得到:

$$A\ddot{Q} + B\dot{Q} = R(t) \quad (6)$$

其中 A 为 $3N$ 阶方阵,其各元素仅与层合材料各层的密度及厚度相关, B 也是 $3N$ 阶方阵,对应于人工粘性项,其各元素取决于粘性系数、各层的密度及厚度。 $Q(t)$ 是由各元胞系数组成的列向量。

$$Q(t) = (U_0^{(1)}(t), U_1^{(1)}(t), U_2^{(1)}(t), U_0^{(2)}(t), U_1^{(2)}(t), U_2^{(2)}(t), \dots, U_2^{(N)}(t))^T \quad (7)$$

列向量 $R(t)$ 由方程组中不含时间导数的项组成。方程(6)是通过差分法来近似求解的

$$Q(t + \Delta t) = (\Delta t)^{-1} [A + B]^{-1} R(t) + \frac{1}{2} [A + B]^{-1} A Q(t) - \frac{1}{2} [A + B]^{-1} [A - B] Q(t - \Delta t) \quad (8)$$

2 初值条件

方程组(6)是关于时间的二阶微分方程组,在数值求解时,需要知道 $t = 0$ 时刻和 $t = \Delta t$ 时刻的元胞系数值。以开始加载或碰撞刚接触时刻为零时刻,在零时刻材料未发生动态响应,所有元胞系数均为零,因此只需确定 $t = \Delta t$ 时的初值。

2.1 模拟应力入射时的材料响应

研究弹性波在由 304 不锈钢和 PMMA 层叠而成的非线性弹性材料中的传播问题。主要参数见表 1。波的传播方向垂直于铺层方向。施加的外载荷作用于 $x_1 = 0$ 的界面上,并垂直于层界面,即沿 x_1 轴方向。采用文献[4]中的外载荷 $\sigma(t)$,不同上升沿的外载荷 $\sigma(t)$ 随时间的变化如图 2 所示, σ_0 为单位应力,其中图(a)中的波上升沿陡峭,而图(b)和(c)中的上升沿平缓。

表 1 材料常数及厚度^[4]

Tab.1 Material properties and thickness

	弹性模量 E (GPa)	弹性模量 E' (GPa)	密度 ρ (kg/m ³)	厚度 d (cm)
304 stainless steel	14.71	-1112.0	7.896×10^3	0.1
PMMA	9.027	-131.2	1.185×10^3	0.1

有外载荷作用时,元胞 1 的外界面上满足

$$\sigma^{(1)}(-d_1/2, t) = \sigma(t) \quad (9)$$

第 N 元胞的外界面为自由面时,满足,

$$\sigma^{(N)}(d_N/2, t) = 0 \quad (10)$$

用(9)(10)式分别替代方程组(6)中的第一个和最后一个方程,方程组仍保持封闭性。

计算时,时间步长取得足够小,使得 $t = \Delta t$ 时刻的应力波尚在元胞 1 之内传播,因而元胞 1 左界面的速度在 $t = \Delta t$ 时为^[6,7]:

$$\dot{u}(-d_1/2, \Delta t) = \frac{c_L^{(1)}}{E_1} \sigma(\Delta t) \quad (11)$$

其中, $c_L^{(1)}$ 是元胞 1 中沿 x_1 方向的纵波速度, E_1 为其弹性模量。由元胞 1 两边界在 $t = \Delta t$ 时刻的位移及应变状态,可求得 $t = \Delta t$ 时刻的元胞系数之值:

$$U_0^{(1)}(\Delta t) = \frac{\dot{u}\Delta t}{3}, U_1^{(1)}(\Delta t) = -\frac{\dot{u}\Delta t}{2}, U_2^{(1)}(\Delta t) = \frac{\dot{u}\Delta t}{6} \quad (12)$$

除元胞 1 之外,其余各元胞的元胞系数初值均为零。

2.2 模拟碰撞

考虑厚度为 1cm 的 304 钢飞片以速度 V_0 平面撞击上述由 304 不锈钢和 PMMA 构成的层合材料靶,碰撞的方向垂直于铺层方向。飞片为均匀材料,但在模拟中可将其进行虚拟分层,等分成 P_c 个层。在碰撞过程中,整个系统(包括飞片与靶)从 1 到 N 统一编号。因此碰撞发生在元胞 P_c 与元胞 $(P_c +$

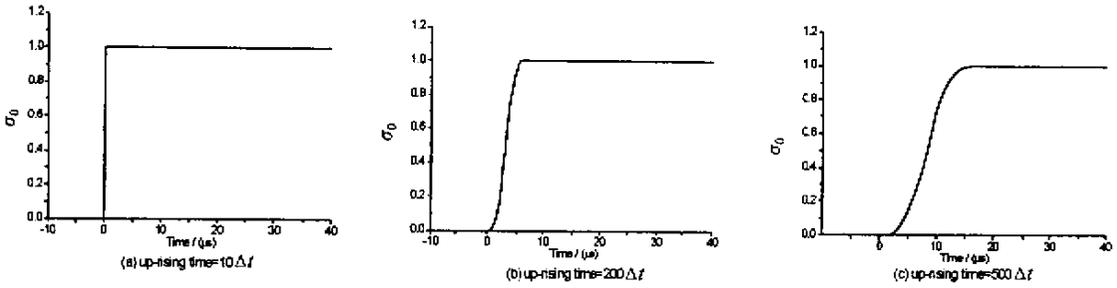


图2 不同上升沿的入射波 ($\Delta t = 1.1 \times 10^{-8} \text{s}$)

Fig.2 Profiles of incident stress waves with different up-rising time ($\Delta t = 1.1 \times 10^{-8} \text{s}$)

1)之间。计算时 P_c 取为 10。

为得到形如(6)式的方程组并利用(8)式进行求解,需用新的飞片-靶系统的自由边界条件分别替代方程组(6)中的第一个和最后一个方程,并确定 $t = \Delta t$ 时刻的元胞系数。事实上,总可以找到这样的步长 Δt ,使得在 $t = \Delta t$ 时刻,由碰撞引起的应力波仍在元胞 P_c 和元胞 $(P_c + 1)$ 内传播,不难得到 $t = \Delta t$ 时刻的初值。

在 $t = \Delta t$ 时刻,元胞 1 至元胞 $(P_c - 1)$ 未受扰动,元胞系数为

$$U_0^{(P)}(\Delta t) = V_0 \Delta t, U_1^{(P)}(\Delta t) = 0, U_2^{(P)}(\Delta t) = 0 \tag{13}$$

同理,元胞 $(P_c + 2)$ 至元胞 $2N$ 的元胞系数为

$$U_0^{(P)}(\Delta t) = 0, U_1^{(P)}(\Delta t) = 0, U_2^{(P)}(\Delta t) = 0 \tag{14}$$

而元胞 P_c 与元胞 $(P_c + 1)$ 的元胞系数为:

$$U_0^{(P_c)}(\Delta t) = \frac{(V_2 + V_0)\Delta t}{3}, U_1^{(P_c)}(\Delta t) = \frac{(V_2 - V_0)\Delta t}{2}, U_2^{(P_c)}(\Delta t) = \frac{(V_2 - V_0)\Delta t}{6} \tag{15}$$

$$U_0^{(P_c+1)}(\Delta t) = \frac{V_2 \Delta t}{3}, U_1^{(P_c+1)}(\Delta t) = -\frac{V_2 \Delta t}{2}, U_2^{(P_c+1)}(\Delta t) = \frac{V_2 \Delta t}{6} \tag{16}$$

其中: $V_2 = V_0 / (1 + \gamma)$, $\gamma = \sqrt{\rho_{P_c+1} E_{P_c+1} / \rho_{P_c} E_{P_c}}$ 。

以上两种初值条件中均忽略了本构中的非线性弹性项,对于含非线性项的本构,上述初值条件仍可作为近似值参入计算。

3 计算结果及分析

依据上述方法用自编程序计算了半无限层合材料中固定位置处的应力。图3是元胞40与元胞41的界面上 ($x_1 = 4 \text{cm}$) 的应力随时间的变化。其中图(a)(b)和(c)分别对应于图2中(a)(b)和(c)三种脉冲加载下的结果。为比较起见,计算了非线性弹性材料的响应(实线)和线弹性材料($E_p' = 0$)的响应(虚线)。无论哪种材料,在图3(a)中,应力波形均有明显的振荡,测量应力“ $\sigma_0 - \text{峰顶} - \sigma_0 - \text{谷底} - \sigma_0$ ”的时间间隔,发现随着时间的推移,振荡逐渐具有周期性。振幅随时间逐渐衰减,从衰减的趋势可以看出,应力波将平衡于入射波的峰值 σ_0 。而图3(b)和(c)中,基本上观察不到振荡现象。这表明,层合材料中的应力振荡与入射波的上升沿相关,入射波的上升沿越短,振荡越明显,上升沿越宽振荡越不明显,当上升沿大于某长度时,基本上观察不到应力的振荡。

为比较起见,还计算了半无限304钢(非线性弹性和线弹性)在图2中的应力波作用下的响应。为保持相同的计算条件,将304钢进行了人工分层,总层数也保持相同,每层厚度 d 也为 0.1cm ;人工粘性系数 η 也保持相同。图4是 $x_1 = 4 \text{cm}$ 处,即元胞40与元胞41界面上的应力随时间的变化。从图4中均观察不到振荡现象,这表明,即使是在短上升沿的脉冲加载下,对于均匀材料,材料的非线性弹性和人为分层都不会导致应力的振荡,从侧面反映了振荡与层合材料的非均匀性有关。

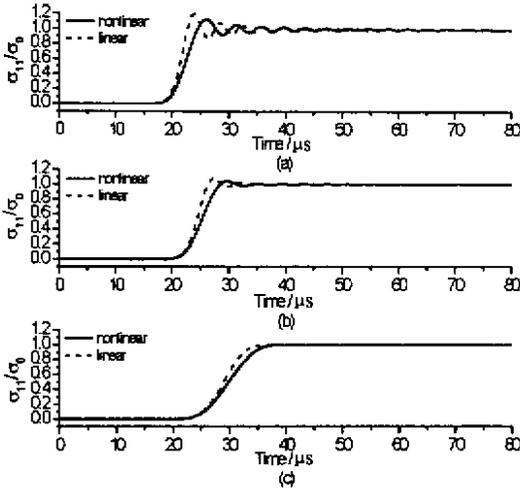


图3 层合材料在不同应力脉冲加载下 $x_1 = 4\text{cm}$ 处的应力波比较

Fig.3 Comparison of the profiles of waves at $x_1 = 4\text{cm}$ in bilaminate

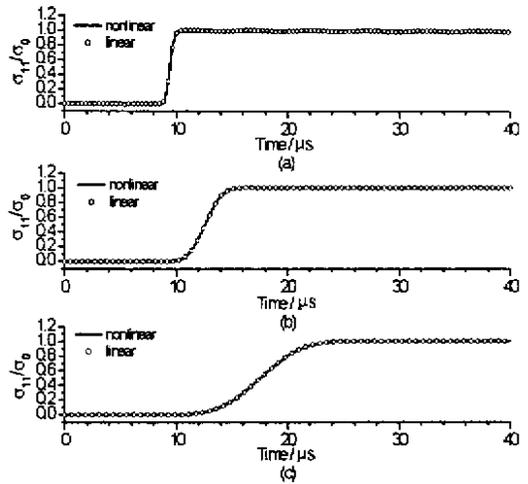


图4 均匀材料在不同应力脉冲加载下 $x_1 = 4\text{cm}$ 处的应力波比较

Fig.4 Comparison of profiles of waves at $x_1 = 4\text{cm}$ in 304 stainless steel

为研究分层厚度与应力波振荡周期的关系,在图2中的脉冲(a)加载下,分别计算了 $d = 0.4\text{cm}$ 和 $d = 0.1\text{cm}$ 两种厚度下元胞40与元胞41的界面上的应力波。当采用无量纲时间,并将 $d = 0.4\text{cm}$ 时的时间单位设为 $d = 0.1\text{cm}$ 时的四倍时,发现两条应力波曲线重合,见图5。这表明当单层厚度增为原来四倍时,振荡周期也增加到四倍,进一步表明应力波的振荡与层合材料的非均匀性有关。同时还可看出,应力波的衰减规律也很一致。

当人工粘性系数 η 分别为0和0.05时,计算得到的该非线性弹性层合材料中的应力波形如图6所示。当 $\eta = 0$ 时,应力波振荡现象比 $\eta = 0.05$ 时要明显。因此MOC方法中人工粘性可以改善应力波,但不能消除这种振荡。

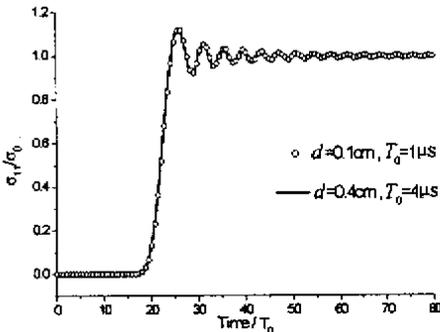


图5 不同厚度的非线性弹性层合材料中相同元胞处的应力波形比较(上升时间 = $10\Delta t$)

Fig.5 Comparison of stress profiles at the same cell in nonlinear elastic laminates of different thickness (up-rising time = $10\Delta t$)

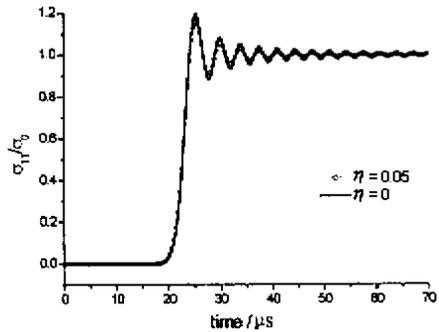


图6 不同人工粘性对非线性弹性层合材料中应力波形的影响(上升时间 = $10\Delta t$)

Fig.6 Influence of different artificial viscosity on stress profiles in nonlinear elastic laminates (up-rising time = $10\Delta t$)

最后,MOC方法应用于模拟飞片撞靶问题,第一种靶为非线性弹性PMMA,第二种靶为上述的半无限非线性弹性层合材料。用1cm厚的304钢作飞片,初速度取为20m/s。定义碰撞刚接触时刻为零时刻。图7和图8分别是用MOC计算得到的PMMA和层合材料中元胞30右界面上($x_1 = 3\text{cm}$)的应力波。在图7中,可看见一系列的应力平台。标为A的第一个应力平台是由右传的压缩波导致的。当沿相反方向传播的压缩波到达飞片的自由表面时,反射稀疏波,该稀疏波透射进入靶中,靶中的应力波强度就降低了,当一系列稀疏波透射到靶中,应力最终降到零。同样,一系列稀疏波透射进层合材料靶中,但层合材料中没有形成一系列的应力平台,而是振荡的,见图8,应力的强度最终也降到零。

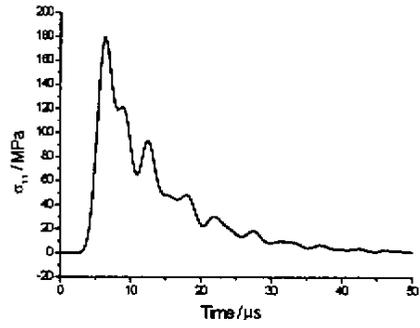
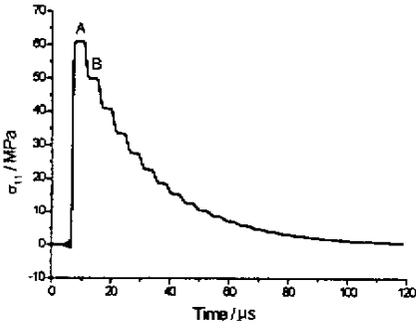


图7 PMMA靶中 $x_1 = 3\text{cm}$ 位置上的应力波形 图8 层合材料靶中 $x_1 = 3\text{cm}$ 位置上的应力波形

Fig.7 Profile of stress in PMMA target at $x_1 = 3\text{cm}$ Fig.8 Profile of stress in laminate target at $x_1 = 3\text{cm}$

4 结束语

非线性弹性层合材料中应力波的振荡与加载波的上升沿有关,上升沿越宽,振荡越明显;振荡还与层合材料的非均匀性有关,均匀材料的人工虚拟分层并不会导致应力波的振荡;在MOC方法中,施加人工粘性能改善应力波形。

参考文献:

- [1] Sun C T, Achenbach J D, Herrmann G. Continuum Theory for a Laminated Medium[J]. Journal of Mechanics, 1968, 35: 467 - 475.
- [2] Drumheller D S, Bedford A. On a Continuum Theory for a Laminated Medium[J]. J. Appl. Mech. 1973, 40: 527.
- [3] Achenbach J D. A Theory of Elastic with Microstructure for Unidirectionally Reinforced Composites[M]. New York: Springer, 1975.
- [4] Aboudi J. Transient Waves in Composite Materials[J]. Wave Motion 1987, 9: 141 - 156.
- [5] Clements B E, Johnson J N. Stress Waves in Composites Materials[J], Phys Rev E, 1996, 54: 6876 - 6888.
- [6] 徐明利, 张若棋, 张光莹. 用元胞法研究层合材料中的应力波[J]. 高压物理学报, 2000, 14(3): 182 - 188.
- [7] 阿肯巴赫. 弹性固体中波的传播[M]. 徐植信, 洪锦如译. 上海: 同济大学出版社, 1992. 21 - 22.

