

高精度差分格式 WNNND 的构造及数值实验*

赵海洋, 刘伟, 万国新

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

摘要 :基于二阶 NND 格式,通过引入 Jiang 和 Shu 的加权思想以及具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 方法,构造了一种时间、空间均达到三阶精度的 WNNND 格式。分别以波动方程、一维 Euler 方程和三维全 Navier-Stokes 方程为例,通过对 WNNND 格式的数值结果分析表明,WNNND 格式引起的耗散和波动较小,并且能够高精度地分辨间断。

关键词 :WNNND 格式;数值模拟;Euler 方程;Navier-Stokes 方程

中图分类号 :V411.3 **文献标识码** :A

The Structure and Numerical Experiment of High Order WNNND Schemes

ZHAO Hai-yang, LIU Wei, WAN Guo-xin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :Based on the 2nd order NND scheme, a third order WNNND scheme was constructed with Jiang and Shu's weighted idea and third order TVD Runge-Kutta method. It was applied in solving linear equation, 1D Euler equations and 3D Navier-Stokes equations. The numerical results indicate that WNNND scheme brings about less dissipation and spurious oscillations and it can catch the discontinuities of the flow field.

Key words :WNNND scheme; numerical simulation; Euler equations; Navier-Stokes equations

在采用有限差分法求解空气动力学方程组(N-S 方程、Euler 方程)的过程中,20 世纪 80 年代发展起来的二阶精度的 TVD 系列差分格式虽然具有较好的捕捉激波能力,但对一些具有小尺度特征问题,其精度仍嫌不够,而且在激波及极值点处 TVD 格式通常只有一阶精度;另一方面,由文献 [1] 分析可知,在考虑加热问题突出、存在复杂波系结构等粘性影响比较大的问题时,低阶格式对网格数要求较多,而高阶格式可以大大降低对计算网格的要求。鉴于上述, Harten 等人在文献 [2] 中提出了采用滑动模板技术建立高阶高精度基本无振荡格式(ENO)的思想,而张涵信等人在二阶 NND 格式的基础上发展了三阶 ENN 格式^[3]。1994 年, Liu, Osher 等人^[4]针对 ENO 格式的不足提出了采用“加权(weighted)”构造高精度格式(WENO)的思想,后经 Shu 等人^[5]的进一步发展,使得采用加权思想构造的高精度格式日趋成熟。目前,在湍流、航空声学以及热流、摩阻等问题的研究中,高精度格式的应用正日趋广泛。

本文采用 Jiang 和 Shu 的加权思想,以及具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 时间方向离散方法,在 NND 格式的模板基础上构造了时、空三阶精度的 WNNND 格式,并通过求解波动方程、一维 Euler 方程以及三维 Navier-Stokes 方程来比较 WNNND 格式的特点。

1 控制方程

本文涉及的方程有波动方程、一维 Euler 方程和全 N-S 方程。

* 收稿日期:2002-06-26

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(01jyy2008),国家部委资助项目(413130101)

作者简介:赵海洋(1977—)男,硕士生。

1.1 波动方程

标量型波动方程为

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & -1.0 \leq x \leq 1.0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

1.2 一维 Euler 方程

在笛卡尔坐标系下,对于完全气体,忽略粘性应力和热传导,一维 Euler 方程组可写成如下守恒形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(U)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

其中 U 是守恒状态变量, \mathbf{F} 是无粘通矢量。

1.3 全 N-S 方程

在完全气体假设下,全 Navier-Stokes 方程在贴体坐标系下的无量纲形式为

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \mathbf{E}_V}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_V}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_V}{\partial \zeta} \quad (3)$$

式中: U 为守恒状态变量, \mathbf{E} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 为无粘通矢量, \mathbf{E}_V 、 \mathbf{F}_V 、 \mathbf{G}_V 为粘性通矢量。

2 WNND 格式的构造方法

在二阶 NND 格式的基础上,引入加权思想,构造空间精度的三阶 WNND 格式。对于一维 Euler 方程(2),半离散形式的 WNND 格式可写成

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_j = -\frac{1}{\Delta x} (h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

其中 $h_{j+\frac{1}{2}} = h_{j+\frac{1}{2}}^+ + h_{j+\frac{1}{2}}^-$, 下边以 $h_{j+\frac{1}{2}}^+$ 为例来说明格式的具体构成。

$h_{j+\frac{1}{2}}^+ = \omega_1 h_1^+ + \omega_0 h_0^+$ 式中模板 h_1^+ 、 h_0^+ 的表达式为

$$h_1^+ = F_j^+ + \frac{1}{2} \Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+$$

$$h_0^+ = F_j^+ + \frac{1}{2} \Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+$$

加权系数 $\omega_i = \alpha_i / (\sum \alpha_i)$, $\alpha_i = \frac{c_i}{(\epsilon + IS_i)^2}$, $i = 1, 2$ 。 ϵ 为避免分母为零的常数,一般取 10^{-5} 到 10^{-10} 之间,本文取为 10^{-6} 。系数 $c_0 = \frac{2}{3}$, $c_1 = \frac{1}{3}$ 。

IS_0 、 IS_1 为网格模板的光滑度量系数

$$h_1^+ : IS_1 = (F_{j+1}^+ - F_j^+)^2$$

$$h_0^+ : IS_0 = (F_{j-1}^+ - F_j^+)^2$$

为了提高时间方向的离散精度,本文在时间方向采用具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 法^[6]

$$\begin{cases} U_i^{(0)} = U_i^n \\ U_i^{(1)} = U_i^{(0)} + L_i(U_i^{(0)}) \\ U_i^{(2)} = \frac{3}{4} U_i^{(0)} + \frac{1}{4} U_i^{(1)} + \frac{1}{4} L_i(U_i^{(1)}) \\ U_i^{n+1} = \frac{1}{3} U_i^{(0)} + \frac{2}{3} U_i^{(2)} + \frac{2}{3} L_i(U_i^{(2)}) \end{cases} \quad (5)$$

$L_i(U)$ 为式(4)的空间差分。

这样,在空间采用 WNND 方法差分离散,在时间方向采用具有 TVD 性质的三阶 Runge-Kutta 法离散则得到空间和时间方向均为三阶精度的差分格式。

3 算例与结果分析

3.1 算例 1 波动方程求解

控制方程为式(1),初始条件为

$$\begin{cases} u_0(x) = [1 - (10x/3)^2]^{1/2}, & -0.3 \leq x \leq 0.3 \\ u_0(x) = 0, & \text{其它} \end{cases}$$

计算区域为 $[-1.0, 1.0]$ 采用真值固定法来处理入口边界,出口外推。库朗数 $CN = 0.6$ 。图 1 所示为 $t = 0.5$ 时分别采用 NND 格式、WNND 格式及 ENN 格式的计算结果与理论值(exact)的比较。右边上下两个小图分别为曲波前后两个间断处的放大图。

从图中可以看出,三种差分格式的计算结果与理论值的趋势相同,其中二阶 NND 格式的耗散最大,对间断区的抹平最为明显;三阶 ENN 格式对间断区的抹平较小,但是它在波后有振荡,而三阶 WNND 格式则基本上克服了以上两种格式存在的不足,计算结果较为理想。

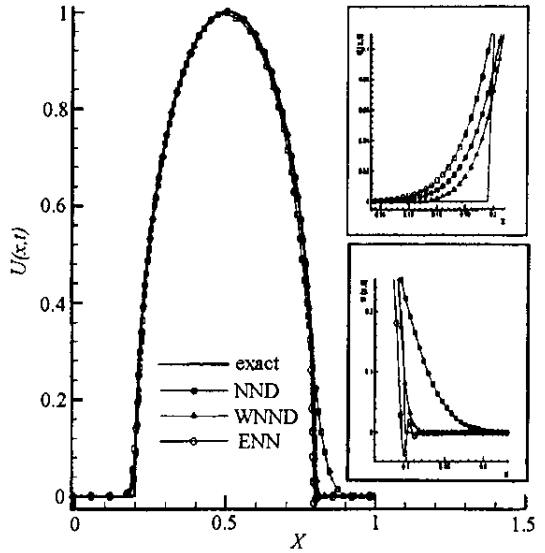


图 1 波动数值解比较

Fig.1 Result comparison

3.2 算例 2 Lax 问题求解

控制方程为一维 Euler 方程(2),初场为:

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (0.445, 0.698, 3.528) \quad 0 < x < 0.5$$

$$(\rho_R, u_R, p_R) = (0.5, 0, 0.571) \quad 0.5 < x < 1$$

ρ, u, p 分别为密度、速度及压强。库朗数 $CN = 0.6$,入口边界取来流值,出口则采用外推法。图 2(a)(b)和(c)分别为时间 $t = 0.13$ 时 NND 格式、WNND 格式以及三阶 ENN 格式的密度数值结果与理论值的比较结果。

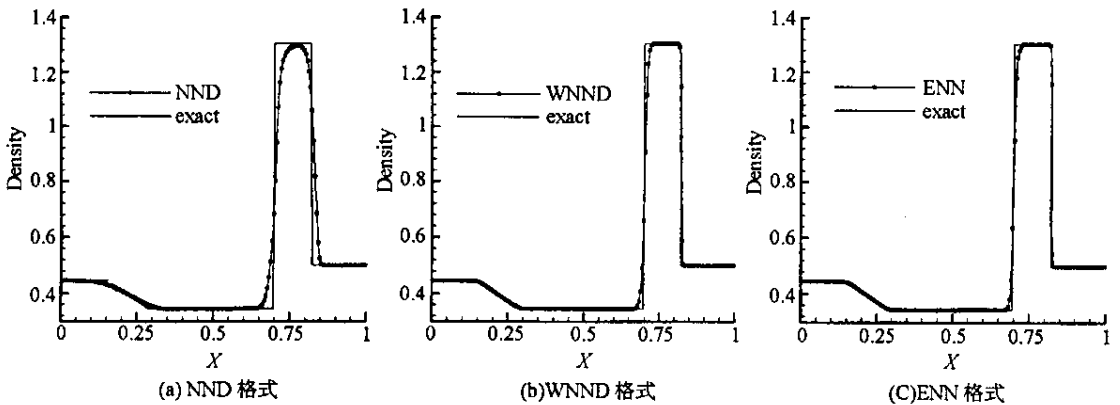


图 2 Lax 问题数值计算结果

Fig.2 Numerical calculation of Lax problem

从图 2 可以看出,三种计算方法都能够捕捉到流动间断,其中 NND 格式的耗散作用最明显,而三阶精度的 WNND 格式与 ENN 格式的计算结果明显好于 NND 格式;ENN 格式在接触间断处稍有波动。

3.3 算例 3: 三维球头绕流

控制方程为式(3)全 N-S 方程,采用本文构造的 WNND 格式离散,粘性项采用中心差分离散。外边界采用抛物线拟合,网格数为 $37 \times 19 \times 35$ (流向 \times 周向 \times 法向),没有计算底部流动。来流为 $M_\infty = 7.0$ 的均匀来流,攻角为零, $Re_N = 2.0 \times 10^6$, $T_\infty = 67.9\text{K}$,壁温 $T_w = 300\text{K}$ 。入口为来流条件,出口采用外推法处理,壁面给定法向压力零梯度条件。本算例主要考察 WNND 与其出发格式 NND 的结果差异,图 3 为 WNND 格式和 NND 格式的壁面压强计算结果与 Lynbimov^[7]的结果的比较,从图中可以看到本文计算结果与 Lynbimov 的结果基本吻合。图 4 为 WNND 格式和 NND 格式的计算等压线图。比较可知,WNND 格式和 NND 格式计算结果基本一致,但 WNND 格式激波捕捉效果更好,在相同网格下其激波厚度比 NND 格式更薄。

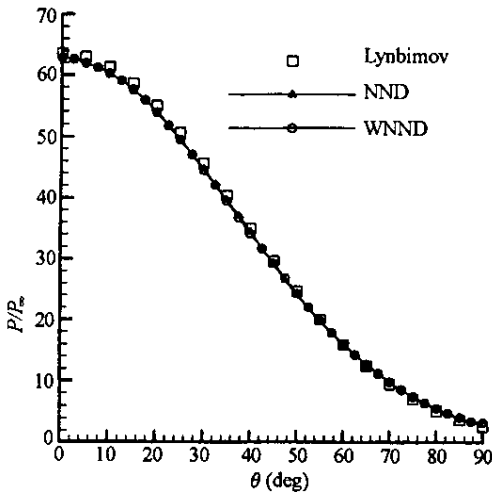


图 3 壁面压强分布

Fig.3 Pressure distribution along the wall

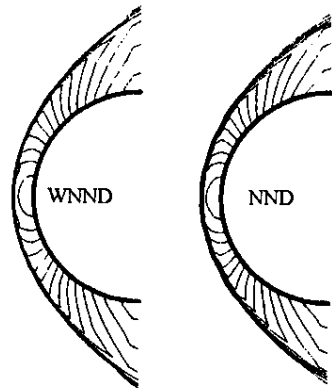


图 4 压强等值线图

Fig.4 Contour of pressure

4 结论

(1) 本文在 NND 格式的基础上,采用 Jiang 和 Shu 的加权思想和具有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法成功地构造了具有时、空三阶精度的 WNND 格式。

(2) 通过对线性波动方程、一维 Euler 方程以及三维全 N-S 方程的数值实验表明:时空三阶精度的 WNND 格式对流场间断具有较高的分辨率且基本无波动,明显优于二阶 NND 格式和三阶 ENN 格式。

参考文献:

- [1] 张涵信等. 网格与高精度差分计算问题[J]. 力学学报, 31(4), 1999.
- [2] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarth S. Uniformly High Order Essentially Non-oscillatory Schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1997, 131: 1-2.
- [3] 贺国宏. 三阶 ENN 格式及其在高超声速粘性复杂流场求解中的应用[D]. 国防科技大学博士学位论文, 1994.
- [4] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115: 200-212.
- [5] Jiang G S, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 202-228.
- [6] Shu C W. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-capturing Schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1998, 77: 439-471.
- [7] Lynbimov A N, Rusanov V V. Gas Flow Past Blunt Bodies[J]. NASA-TT-F715, 1973.

