

文章编号: 1001-2486(2003)01-0017-04

# 高精度高分辨率 WENO 格式分析与改进\*

侯中喜, 易仕和, 李 桦

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 高精度、高分辨率计算格式对提高超声速复杂流场的计算水平有重要的意义。WENO 格式是在 ENO 格式基础上发展起来的一类新型高精度、高分辨率格式, 本文在格式加权算法理论和数值分析的基础上, 对加权算法进行了改进, 通过模型问题应用可以看出: 改进后格式权值的计算更为光滑, 仍具有高精度、高分辨率的性质, 并克服了随网格变化而出现的波动现象。

**关键词:** 高精度; 高分辨率; WENO 格式; 加权因子

**中图分类号:** V211.1; O241 **文献标识码:** A

## Analysis and Improvement of High Precision, High Resolution WENO Schemes

HOU Zhong-xi, YI Shi-he, LI Hua

(College of Aerospace and Material Technology, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** High precision, high resolution schemes have significant means in raising the level of the complex supersonic flow-field calculation. WENO schemes are new schemes recently developed which are based on the ENO schemes. The algorithm of weighted factors in WENO schemes was studied and analyzed by theoretic and numeric method. Then, the improvement of algorithm was given. Through applying the improved algorithm to two model problems, it shows that the weighted factor of improved schemes is more smooth. The improved schemes preserve high precision, high resolution characteristics and solve the problem of weak oscillatory with varied mesh.

**Key words:** high precision; high resolution; WENO scheme; weighted factor

如何合理、精确地分析和分辨非定常、非光滑、多尺度流场一直是困扰流体力学工作者的重要问题。现今一般认为<sup>[1-7]</sup>采用高精度格式不但可以降低对网格规模的苛刻要求, 而且能够正确分辨其中复杂的流动现象。目前, 在热流、粘性应力以及气动声学等 CFD 难点问题的研究中, 高精度、高分辨率格式是一个热点研究领域。

WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)<sup>[2]</sup>格式是 1994 年由 Liu, Osher 等人在 ENO 格式构造思想基础上提出的<sup>[1]</sup>。ENO 格式具有在间断区分辨率高, 在光滑区计算精度高等优点, 但也存在着一些不足之处。WENO 格式通过引入变化的加权因子, 使格式在光滑区解的截断误差阶数又有了进一步的提高, 而在间断区附近仍然保持了 ENO 格式良好的分辨能力, 并且格式的稳定性又有了进一步的增强。WENO 格式自提出以来已有了长足的发展, Shu 等人在 1996 年<sup>[3]</sup>对 WENO 格式作了进一步的改进, 通过优化加权因子的计算方法, 使得格式精度在光滑区得到进一步的提高, 近几年其理论的发展和一些实际算例表明<sup>[2-4]</sup>: WENO 格式特别适合计算包含各类间断和含多种复杂流动光滑结构以及二者相互作用的流场。

本文对 WENO 格式在应用中随网格变化而出现的一些问题进行了分析, 在分析的基础上给出了加权因子计算方法的改进, 通过模型问题的计算可以看出: 上述改进不但保留了原格式高精度、高分辨率

\* 收稿日期: 2002-08-28

基金项目: 国家部委资助项目(413130101); 校基础研究项目(JC01-01-002)

作者简介: 侯中喜(1973-), 男, 讲师, 博士。

的特性, 而且克服了随网格变化而出现的微弱波动现象。

## 1 WENO 格式分析

WENO 格式是在 ENO 格式基础上构造的, 具体的 ENO 格式处理方法参见文献[2]。

### 1.1 WENO 格式算法简介

考虑物理量  $u$  在  $i + \frac{1}{2}$  处值的计算, 按 ENO 的方法得到  $k$  个重构值  $u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ 。

WENO 采用  $u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$  的凸组合来近似  $u(x_{i+\frac{1}{2}})$ , 取  $u_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$  作为  $u(x_{i+\frac{1}{2}})$  的近似。

### 1.2 WENO 格式加权方法

对于  $k$  阶精度的 ENO 方法, 可以计算得到  $k$  个 ENO 方法重构的边界值  $u_{i-\frac{1}{2}}^{(r)}$ ,  $u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ , 其精度为  $k$  阶。通过加权因子  $\omega_r$ ,  $\omega_r$  来计算

$$u_{i-\frac{1}{2}}^- = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{i-\frac{1}{2}}^{(r)}, \quad u_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r u_{i-\frac{1}{2}}^{(r)}$$

考虑到在光滑区存在有:

$$u_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r u_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = u(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1})$$

因此权值可以处理为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad r = 0, \dots, k-1$$

其中

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(e + \beta_r)^2}$$

式中  $\beta_r$  被称作模板  $S_r(i)$  的光滑指示器, 而  $e > 0$  是为了避免被零除而引入的小量。

$\beta_r$  可以采用物理量整体变差的  $L^2$  模来考察:

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx$$

## 2 WENO 格式加权方法改进

本文从计算和分析两个方面给出 WENO 格式存在的问题, 并给出相应的改进算法。

### 2.1 格式在计算中的表现

问题 1: 分析如图 1 所示的初始标量问题, 它包含强间断、弱间断以及光滑的结构, 考虑经过一定时间后解的情况。图 2 表示不同计算格式加权因子分布。计算结果如图 3、4 所示, 图中符号“-”后的“5”代表原 5 阶 WENO 格式, “G”代表改进后的算法, 后面未经说明都有相同的表示意义。可以看出: 在间断处计算结果基本无振荡, 加权因子也退化到单一模板形式, 格式具有较好的分辨率; 而在导数间断处, 加权因子并未退化到单一模板形式,  $\omega_1$  约等于 0.4, 计算结果存在微弱的波动。

问题 2: 激波平板反射。入射激波以一定的角度打到平板上并被反射。图 5、图 6 分别给出了网格为  $60 \times 20$  和  $120 \times 40$  时, 5 阶 WENO 格式计算结果的压力等值线分布。可以看出: 在  $120 \times 40$  的网格下, 计算结果出现了轻微的波动, 而在  $60 \times 20$  网格下, 计算结果基本无波动。

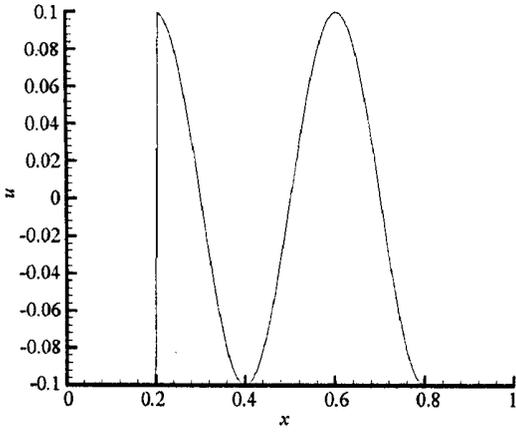


图 1 一维标量非定常问题初值

Fig. 1 Initial condition of 1D scale unsteady problem

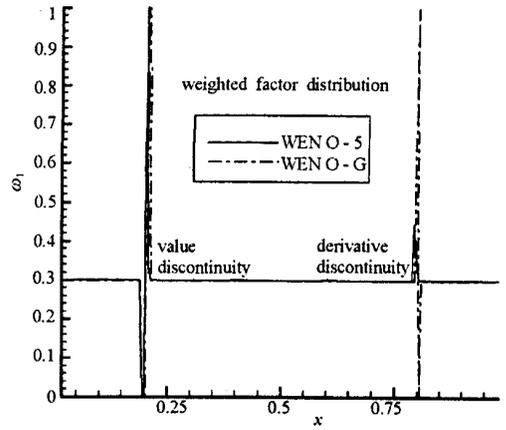


图 2 不同计算格式加权因子分布

Fig. 2 Different weighted factor distribution

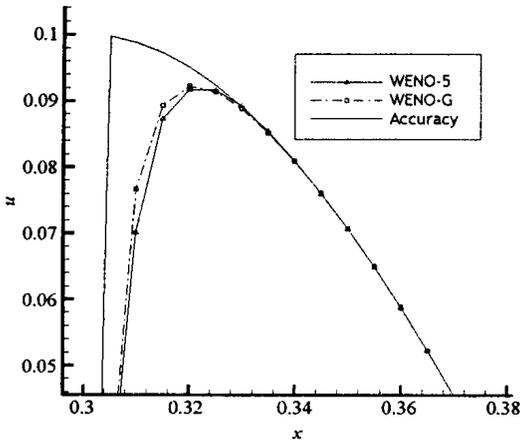


图 3 标量问题间断处局部

Fig. 3 Scale problem discontinuous local

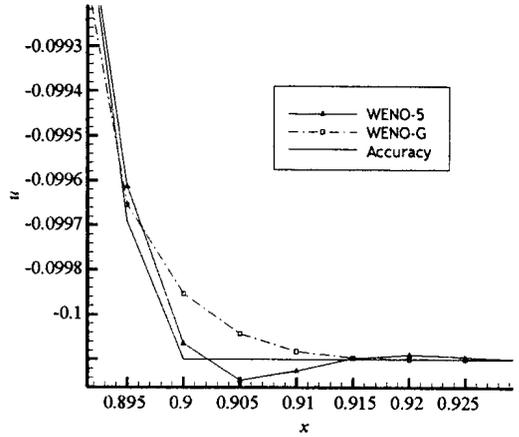


图 4 标量问题导数间断处局部

Fig. 4 Scale problem derivative discontinuous local

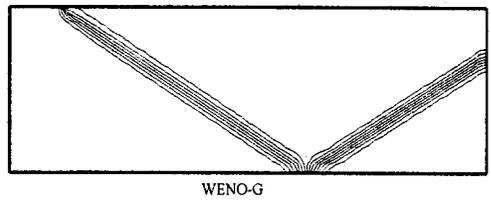
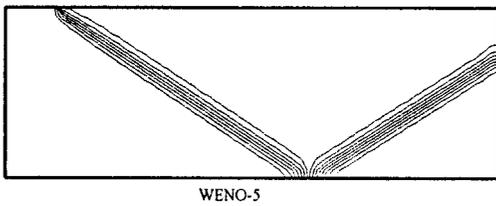


图 5 二维激波平板反射压力等值线(网格 60×20)

Fig. 5 2D shock plane reflection pressure contour (different weighted factor algorithm)

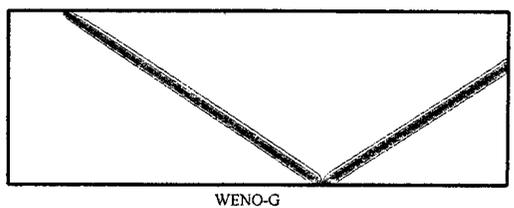
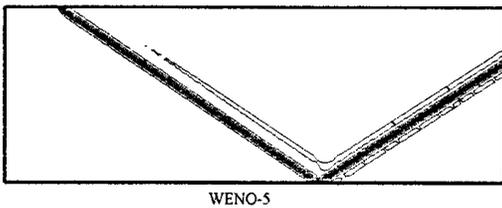


图 6 二维激波平板反射 WENO 改进前后压力等值线(网格 120×40)

Fig. 6 2D shock plane reflection problem pressure contour (different weighted factor algorithm)

## 2.2 WENO 格式加权算法的分析与改进

WENO 格式的加权计算公式形式上消除了同网格尺度的关联,但分析发现加权因子同网格的大小相关,如对于 5 阶 WENO 格式,对应的光滑指示器由 Taylor 展开式可以得到:

$$\beta_r = (f'h)^2(1 + O(h^2))$$

可以看出其同网格间距的平方相关,如果网格尺度较小,且在弱非光滑区(如导数不连续、间断区边缘等),特别当二维和三维非光滑结构同网格方向不一致时,就可能出现  $\beta_r$  作为光滑指示器失效,这主要是由光滑指示器  $\beta_r$  和  $e$  的相对大小引起的,计算中表现为在间断附近有一定的波动,弱间断附近加权因子并没有退化到 1 或 0,而在强间断处反而能够满足这点(图 2),因而在间断处格式基本无振荡(图 3),而在弱间断处出现了振荡(图 4)。

依据上面分析,本文对 WENO 格式加权因子进行改进,首先按前面的方法计算光滑指示器  $\beta_r$ 。

若  $\beta_{\min}/\beta_{\max} < C_T$ , 则  $IS_r = 1.0, \quad r = 0, \dots, k-1$ ;

若  $\beta_{\min}/\beta_{\max} > C_T$ , 且  $\beta_{\max} < e_T/h^2$ , 则  $IS_r = 1.0, \quad r = 0, \dots, k-1$ ;

若  $\beta_{\min}/\beta_{\max} > C_T$ , 且  $\beta_{\max} > e_T/h^2$ , 则  $IS_k = 1.0, \quad k$  对应  $\beta_{\min}$ 。

式中  $C_T$  和  $e_T$  都是开关常数。采用改进的算法重新分析上面两个模型问题。对于一维标量问题,在一阶导数不连续、间断和其它光滑区观察加权因子分布,如图 2 所示,改进的算法都给出了合理的加权因子,在光滑区加权因子与最高精度公式的理论值相一致,而在非光滑区,模板选择对应于单一模板。问题的计算结果如图 3、4 中 WENO-G 所示,可以看出:上述方法在强间断处分辨率有进一步的提高,在导数间断处能够基本无波动、清晰地分辨间断,而且对光滑区没有任何影响,保持了格式在光滑区高精度的特征。在二维激波平板反射问题中,图 5、6 中给出了 WENO-G 的计算结果,可以看出改进的算法推广到二维情况能够很好地工作,基本无振荡地反映了激波的反射现象,当网格变化后依然能够得到满意的结果。

## 3 总结

在对 WENO 格式加权方法分析的基础上,对随网格变化而出现的微弱波动问题进行了改进。通过应用可以看出:改进的方法不但克服了上述波动问题,而且仍然保留了原格式高精度、高分辨率的特性。在文献[7]中还对改进后的格式进行了一些分析,改进后的格式在光滑区具有较小的截断误差,并且有良好的残差收敛性能。

## 参考文献:

- [1] Engquist H B, Osher S, Chakravarthy S. Uniformly High Order Essentially Non-oscillatory Schemes[J]. J. Comput. Phys., 1987.
- [2] Liu X D, Osher S. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes[J]. J. Comput. Phys., 1994.
- [3] Jiang G, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes[J]. J. Comput. Phys, 1996.
- [4] Shu C W. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock capturing Schemes [J]. J. Comput. Phys, 1998.
- [5] 傅德熏, 马延文. 高精度差分格式及多尺度流场特性的数值模拟 [J]. 空气动力学学报, 1998, 16.
- [6] 张涵信, 等. 网格与高精度差分计算问题 [J]. 力学学报, 1999, 31.
- [7] 侯中喜. 超声速复杂流场并行数值分析及高阶格式研究 [D]. 长沙: 国防科技大学, 2000.