文章编号:1001-2486(2003)01-0107-04

异常市场的判别*

金治明
(国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073)

摘　要:给出了股票价格的 Black-Scholes 模型中股票期望收益率 μ 及波动率 σ^2 的估计,并证明了这种估计的良好性质。给出异常市场判别准则,提出第一、第二警戒值的计算公式。

关键词:股票;期望收益率;波动率;估计
中图分类号:C89;G12　　文献标识码:A

The Testing for Singular Market

JIN Zhi-ming
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The expected return rate μ and volatility σ^2 of stock are estimated. Some opimal properties of the estimaters are proved. The method for testing singular market is given. The first and second critical value are proposedsented.

Key words: stock; expected rate; volatility; estimate

众知,在 Black-Scholes 模型中欧式买方期权的定价为[1]

$$C(t,S_t)=S_t\Phi(d_1)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{1}$$

这里 S_t 为 t 时股票的价格。

$$d_1=\frac{\log(S_t/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=\frac{\log(S_t/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2}$$

其中 log 表示以 e 为底的对数, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 即

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

而卖方期权的定价

$$P(t,S_t)=K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)-S_t\Phi(-d_1) \tag{3}$$

在定价公式中不出现期望收益率 μ, 这正是 Black-Scholes 公式的优点, 在金融界称为中性定价。但是在公式的推导中假定了 r, 波动率 σ^2 为常数。我国的银行利率比较稳定, 起码在两次利率调整期间认定利率不变是可以的。对波动率的产生原因历来有两种观点, 一是认为波动率是由交易产生的, 二是认为波动率主要来自于股票价格变化的信息。在实际应用中常常用过去的数据估计 σ^2, 得到的估计称为历史波动率; 另一种方法是将市场交易的期权价格代入期权公式反解出 σ^2, 这样得到的波动率称为隐含波动率。如果能利用基于同一种股票的不同期权的交易价格, 按照交易数量的加权平均得到 σ^2, 将会更加合理。

1　μ,σ^2 的估计及其性质

由于

$$X\triangleq\ln\frac{S_t}{S_s}$$

* 收稿日期:2002-07-10
作者简介:金治明(1941—),男,教授。

服从正态分布 $N((\mu-\frac{\sigma^2}{2})(t-s),\sigma^2(t-s))$. 现在假定观测到随机过程 S_t 的一个样本 $\{S_t, t\leqslant T\}$. 将 $[0,T]$ 等分为 n 个区间: $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$, $\Delta=t_i-t_{i-1}$. 记 $X_i=\ln\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$, $i=1,2,\cdots,n$, 于是得到 μ, σ 的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \hat{\mu}=\frac{\overline{X}}{\Delta}+\frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{4}$$

定理 1 上述的极大似然估计 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ 都是渐近无偏估计, $\hat{\sigma}^2$ 是相合估计, 即

$$\mathbf{E}\hat{\mu}\to\mu,\ \mathbf{E}\hat{\sigma}^2\to\sigma^2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\xrightarrow{P}\sigma^2(n\to\infty) \tag{5}$$

而且

$$\mathbf{E}(\hat{\mu}-\mu)^2\to\frac{\sigma^2}{T}\quad(n\to\infty),\ \mathbf{E}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)^2\to 0\quad(n\to\infty) \tag{6}$$

证明 注意到 $X_i\sim N((\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta,\sigma^2\Delta)$ ①, 故

$$\overline{X}\sim N((\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta,\frac{\Delta\sigma^2}{n}),\ X_i-\overline{X}\sim N(0,(1+\frac{1}{n})\sigma^2\Delta)$$

从而

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{\sigma^2\Delta}{T}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2\Delta}\triangleq\frac{\sigma^2\Delta}{T}\xi$$

其中 $\xi\triangleq\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2\Delta}\sim\chi^2_{n-1}$, 故

$$\mathbf{E}\hat{\sigma}^2=\frac{\sigma^2\Delta}{T}(n-1)=\sigma^2-\frac{1}{n}\sigma^2\to\sigma^2$$

而 $\hat{\mu}=\frac{\overline{X}}{\Delta}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$, 因此

$$\mathbf{E}\hat{\mu}=\frac{1}{\Delta}(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\Delta+\frac{1}{2}\mathbf{E}\hat{\sigma}^2=\mu-\frac{1}{2n}\sigma^2\to\mu$$

可见它们均是渐近无偏估计。由于

$$\mathbf{E}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)^2=\mathbf{E}\left(\frac{\sigma^2\Delta}{T}\xi-\sigma^2\right)^2=\sigma^4\mathbf{E}\left(\frac{\xi}{n}-1\right)^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4\to 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{E}(\hat{\mu}-\mu)^2=\mathbf{E}\left(\frac{\overline{X}}{\Delta}-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2+\frac{1}{4}\mathbf{E}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)^2=\frac{\sigma^2}{T}+\frac{2n-1}{4n^2}\sigma^4 \tag{8}$$

可见, $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计, 而 $\hat{\mu}$ 虽不是 μ 的相合估计, 但估计的均方误差随着 T 的增大而减小。□

由上面的定理看出, σ^2 的估计相当好, 既是渐近无偏又是相合的估计。但 μ 估计的误差反比于 T, T 大, 误差却小, 然而 T 大不利于 μ 为常数的假定。因此在实际中只能考虑到市场的其它信息, 在认为 μ 近似为常数的范围内, 尽量取大的 T 来估计 μ.

2 异常市场的判别

投资市场往往是不正常的, 这主要因为具有大资本的投机者在某时机有意抬高或压低某股票的价格, 以获得丰厚的利润。如何判别这种不正常市场, 无论对于股票的投资者, 或市场的管理者都是重要的课题。我们的基本思想非常简单, 认为正常的市场股票价格虽然有升有降, 但应该服从对数正态分

① 这里, ~ 表示随机变量"服从"某分布。

布, 即

$$X \triangleq \ln\frac{S_t}{S_s} \sim N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s),\ \sigma^2(t-s)\right) \tag{9}$$

因此, X 的值落在以 $\mu-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)$ 为中心, 半径为 $3\sigma\sqrt{t-s}$ 的对称区间内的概率为 99.7%. 换言之, X 的值落在这个区间外的概率为 0.3%, 这是一个概率很小的事件。根据数理统计的实际推断原理, 小概率事件在一次试验中, 实际上是不会发生的。因此一旦观察到的 X 落在上述区间外, 则认为出现了异常, 而异常的出现表明有大户的操作。当然这种判别是有风险的, 判别错误的概率或风险就是 0.3%. 值得注意的是, 这里含有未知常数 μ, σ, 如果直接用它们的估计代入, 将有误差, 而且不知其分布。

承上, 假设在某 s 时刻开始观察市场, 将区间 $[s, t]$ 等分为 n 个区间, 记其分点为 $t_0 = s < t_1 < \cdots < t_n = t$, 每个子区间的长度为 Δ, 则 $n\Delta = t-s$。记 $X_i = \log S_{t_i} - \log S_{t_{i-1}}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$X \triangleq \log S_t - \log S_s = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

为独立同分布随机变量的和, 每个 X_i 服从正态 $N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta, \sigma^2\Delta\right)$ 分布, 于是平均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

服从正态 $N\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta, \frac{\sigma^2\Delta}{n}\right)$ 分布。由数理统计可知

$$\chi^2 \triangleq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2\Delta}$$

服从 χ^2_{n-1} 分布, 它可以通过 $[0, 1]$ 区间上的伪随机数, 经适当的变换而获得。而

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t-s}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{\sigma^2\Delta}{t-s}\chi^2 \tag{10}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\overline{X}}{\Delta} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 \tag{11}$$

由于

$$\hat{\mu} - \mu = \frac{\overline{X}-\mu\Delta}{\Delta} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \tag{12}$$

注意到随机变量

$$N \triangleq \frac{\overline{X}-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta}{\sigma\sqrt{\frac{\Delta}{n}}} \tag{13}$$

服从正态 $N(0, 1)$ 分布。由于

$$N = \frac{\overline{X}-\mu\Delta}{\sigma\sqrt{\frac{\Delta}{n}}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{t-s} \tag{14}$$

而由 (12) 式, 有

$$\frac{\sqrt{t-s}\,(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma} = N - \frac{\sigma}{2}\sqrt{t-s} + \frac{\hat{\sigma}^2\sqrt{t-s}}{2\sigma} \tag{15}$$

将 $\sigma = \sqrt{n}\hat{\sigma}/\chi$ 代入, 可得到

$$(\hat{\mu}-\mu)(t-s) - \frac{1}{2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)(t-s) = \frac{\sqrt{n(t-s)}\,\hat{\sigma}N}{\chi} \tag{16}$$

由 (9) 式, 有

$$P\left(\left|X-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right| < 3\sigma\sqrt{t-s}\right) \approx 0.997$$

由(16)式, 最后得到

$$P\left(\left|X-\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)+\frac{\sqrt{n(t-s)}\,\sigma N}{x}\right|<\frac{3\sqrt{n(t-s)}\,\sigma}{x}\right)\approx 0.997 \tag{17}$$

如果将$\frac{3\sqrt{n(t-s)}\,\sigma}{x}$改为$\frac{2\sqrt{n(t-s)}\,\sigma}{x}$, 则上述概率将小于 0.95。注意(16)式中不再含有未知常数, 而标准正态变量也可通过计算机模拟得到。

称$\frac{2\sqrt{n(t-s)}\,\sigma}{x}$为第一警戒值, 称$\frac{3\sqrt{n(t-s)}\,\sigma}{x}$为第二警戒值。具体操作可以编写一个程序, 以某时刻为 s, 计算

$$\left|X-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s)+\frac{\sqrt{n(t-s)}\,\sigma N}{x}\right|$$

当它超过第一警戒值时, 就要引起充分的警惕, 有95%的把握认定大户的操作已经开始, 表明看涨股票不久将可能回落, 而看跌股票不久将要回升。若超过第二警戒值, 则进一步肯定大户参与了抬高或打压, 股票价格的反方向变化将要开始。具体的操作还要考虑到股票除权与分红对股票价格的影响, 此外还可以针对看涨或看跌股票构造单边的警戒值, 这会提高效果, 在此不予叙述。

最后有必要指出, 我们的依据是认为股票市场价格服从对数正态分布, 也即有起伏的股票。如果某股票一段非常平稳, 表明这个股票还没有成熟, 如果用它的变化平稳的数据估计 σ^2, 必然会很小, 尔后的稍大的变化将被判为异常。所以应用时需考虑到这种情形, 要用经验选择股票成熟期的数据, 一般地对股票综合指数的判别会好些。

参 考 文 献:

[1] Hull J C. 期权、期货和生证券[M]. 张陶伟, 译. 北京: 华夏出版社, 1997.

(上接第98页)

4 结论

(1) 激光束穿过超音速射流剪切层后, 会使光束强度的远场分布产生变化。

(2) 研究强激光与超音速流场相互作用的过程中, 对于非聚焦的强激光束, 辐射加热对流场和光场不会造成明显的干扰。

进一步的工作, 可以结合工程实际, 数值模拟激光束通过实际的流场环境时光束强度的分布, 为工程设计提供依据, 更进一步的工作可以研究高速流场的实时脉动光学性能。

参 考 文 献:

[1] Strohbehn J W. Laser Beam Propagation in The Atmosphere [M]. Applied Physics. 1978, 25: 344- 422.
[2] Fleck J A, Jr, Morris J R, Feit M D. Appl phys [J]. 1976, 10: 129- 160.
[3] 陈栋全, 等. 激光大气传输中热晕的数值模拟[J]. 强激光与粒子束, 1993, 5(2): 243.
[4] 刘君, 等. 超声速主流中逆向喷流流场的数值模拟[J]. 空气动力学学报, 1994, 12(4): 383.