

二维随机裂纹介质模型*

张光莹, 曾新吾

(国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

摘要: 利用随机过程的谱展开理论及 Hudson 的裂纹介质模型构造一种裂纹数密度具有空间统计分布的随机介质模型的理论。利用 Hudson 理论的裂纹的微观参数(裂纹数密度)与裂纹介质的宏观性质(弹性常数)相联系的特点, 模拟了二维指数型椭圆型随机介质。结果表明模型将裂纹的微观参数与裂纹介质的宏观性质直接联系起来, 并且裂纹数密度对随机裂纹介质的各个弹性常数有不同程度的影响。

关键词: 裂纹数密度; 随机介质; 谱展开; 自相关函数

中图分类号: O39 **文献标识码:** A

2D Random Model for Cracked Media

ZHANG Guang-ying, ZENG Xin-wu

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: One model of random media is presented according to the theory of spectral factorization in stochastic process and Hudson's model of cracked medium. The advantage of Hudson's model is to make contact between the crack's micro-parameters (crack number density) with the macro-properties (elastic constants) of cracked media. Using this advantage, we present an ellipsoidal random model. The results show that the model outline the relationship between micro-properties and the macro-properties of random media, and can flexibly and effectively describe real cracked media, and the crack number density has different effect on the elastic constants of random cracked media.

Key words: crack number density; random media; spectral-factorization; auto-correlation function

目前, 含裂纹固体的弹性动力学性质在多个领域受到关注, 一个典型的方面就是在地球物理领域。实际介质(特别是油气藏所涉及的介质)往往是非均匀的, 在这些非均匀介质中存在大量微小异常并且分布极不规则的裂纹/裂缝(可以从测井数据或者岩心样品中观测到), 对于高、宽频地震信号, 这些小尺度异常会十分明显地影响地震波的传播。对这种细小无法忽略的异常, 用常规方法很难完整地加以描述, 使用统计学方法描述则较为方便, 因此需要发展一种灵活、方便、能完整描述油藏非均匀性的正演模型, 这就是随机介质模型。随机介质模型理论适应性强, 使用方便、灵活, 能有效地模拟油气藏的细节, 是油藏(或者油储)地球物理中值得深入研究的课题, 也是重要的发展方向。

已有的随机介质的模拟方面的工作主要是对介质的宏观性质(波速、密度等)进行了理论研究, 例如 Ikelle 等^[1]以指数型自相关函数为例进行了二维随机介质模型的正演模拟, 国内奚先等^[2]通过对自相关函数进行修正, 提出一种混合型随机介质模型。Hudson 在一系列文章中^[3,4]提出含有裂缝/裂纹岩石的有效弹性常数理论, 将裂纹/裂缝的参数与介质的弹性常数直接联系起来。

1 理论部分

1.1 Hudson 理论介绍

文献[4]中给出了考虑到裂纹数密度二阶项时的裂纹介质的弹性常数表达式:

$$C = C^0 + C^1 + C^2 + O(\nu^3) \quad (1)$$

* 收稿日期: 2002-10-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40074025); 教育部优秀青年教师资助计划项目

作者简介: 张光莹(1973-), 女, 博士生。

其中 C^0 是无介质时的弹性常数, C^1 是每个裂纹分别独立作用产生的弹性常数的修正项, C^2 是由裂纹间的耦合作用产生的弹性常数的修正项。假设只有一组平行排列、均匀分布的圆币裂纹, 裂纹的尺寸与间距远小于波长, 裂纹的法向 $n = (n_1, n_2, n_3)^T = (0, 0, 1)^T$ 的介质。根据文献[3]的讨论知, 只有两个独立变量, 即 $U_{11} = U_{22}$ 及 U_{33} , 则 C^1 的表达式为:

$$C_{ijkl}^1 = -\frac{\nu(a)^3}{\mu} [\lambda^2 U_{33} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\lambda\mu U_{33} (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{kl} n_i n_j) + 4\mu^2 U_{33} n_i n_j n_k n_l + \mu^2 U_{11} (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jn} n_i n_k - 4n_i n_j n_k n_l)] \quad (2)$$

其中 λ, μ 是基体介质的 Lam 常数, ν 是裂纹的数密度, a 是裂纹的平均半径, 及

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} U_{11}(0) = \frac{16}{3} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right] (1 + M)^{-1} \\ U_{33}(0) = \frac{4}{3} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right] (1 + K)^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$M = \frac{4}{\pi} \left[\frac{a\mu'}{c\mu} \right] \left[\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right] = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\mu'}{d\mu} \right] \left[\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right] \quad (5)$$

$$K = \frac{1}{\pi} \frac{a(\lambda' + 2\mu')}{c\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{(\lambda' + 2\mu')}{d\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right] \quad (6)$$

λ', μ' 是裂纹中所填充介质的 Lam 常数, $d = c/a$ 是裂纹的纵横比, c 是裂纹的厚度。以上明确给出 U_{11} 以及 U_{33} 由裂纹的特征参数及基体介质的弹性常数描述。 C^2 可以由 C^1 表示为:

$$C_{ijkl}^2 = \frac{1}{\mu} C_{ijrs}^1 C_{pqkl}^1 x_{rspq} \quad (7)$$

$$x_{rspq} = -\{ \delta_{rp} \delta_{sq} (4 + \beta^2 / \alpha^2) - (\delta_{rq} \delta_{sp} + \delta_{rs} \delta_{pq}) (1 - \beta^2 / \alpha^2) \} / 15 \quad (8)$$

在(2)式中 C_{ijkl}^1 是裂纹数密度 ν 的一次方与其他参数乘积的关系, 在(7)式中 C_{ijkl}^2 是 ν 的二次方与其他参数乘积的关系, 可以改写为如下形式:

$$C_{ijkl}^1 = \nu D_{ijkl}^1, C_{ijkl}^2 = \nu^2 D_{ijkl}^2$$

则(1)式改写为:

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + \nu D_{ijkl}^1 + \nu^2 D_{ijkl}^2 + O(\nu^3) \quad (9)$$

假设裂纹数密度是由其均值、方差和自相关函数描述的随机过程, 可以用下面表达式来表示:

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \Delta\nu(x) \quad (10)$$

其中 $x = (x_1, x_3)^T$, $\nu_0(x)$ 是背景裂纹数密度, 本文中 $\nu_0(x)$ 在整个空间是常数, $\Delta\nu(x)$ 是加在 $\nu_0(x)$ 上的非均匀扰动量, 是具有给定的均值、方差及自相关函数描述的空间平稳随机过程。

1.2 随机裂纹数密度的生成

为了方便讨论, 裂纹数密度表达式(10)改写为

$$\nu(x) = \nu_0(1 + \sigma(x)) \quad (11)$$

其中 $\sigma(x) = \Delta\nu(x) / \nu_0(x)$, 均值为 0。因为 $\sigma(x)$ 与 $\nu(x)$ 成线性关系, 则可以用 $\sigma(x)$ 描述含有随机分布裂纹的随机介质的非均匀性。假设 $\sigma(x)$ 的自相关函数为 $F(x + x_1, x_1) = \text{auto}(\sigma(x))$, 只与 x 有关。由以上的假设知道 $\sigma(x)$ 是空间平稳随机过程。

在真实的材料中, 裂纹的分布不可能是均匀的, 在空间要有一定的分布, 常用统计函数表示。可以根据实际情况选择自相关函数, 并且由此构造相应的随机介质。Gaussian 型、指数型以及 Von Karman 型自相关函数被广泛地用于对散射现象的研究。选用椭圆型自相关函数:

$$\text{auto}(\sigma(x)) = \exp(-\sqrt{x_1^2/a^2 + x_3^2/b^2}) \quad (12)$$

其中 $a = x_1 / \Delta x_1$, $b = x_3 / \Delta x_3$ 分别是 x_1, x_3 方向的相关长度, Δx_1 及 Δx_3 是模拟时的空间步长。在本

文中要求 $a\Delta x_1, b\Delta x_3$ 远大于波长, 以保证可以直接应用 Hudson 的裂纹介质模型理论。

根据自相关函数、均值、方差等量求具有一定空间分布裂纹数密度。已知随机过程的空间自相关函数的表达式(12), 将自相关函数进行正 2-D Fourier 变换, 得到相应的功率谱函数

$$\text{auto}(k_{x_1}, k_{x_3}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{auto}(x_1, x_3) e^{-i(k_{x_1}x_1 + k_{x_3}x_3)} dx_1 dx_3 \quad (13)$$

一般都是通过引入均值随机变量来产生随机功率谱函数。假设 $\theta(k_x, k_z)$ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量, 与功率谱乘积就得到随机功率谱。又因为自相关函数以及随机数都是由连续函数给定, 而在程序实现时, 用的是一系列的离散数据, 这样就不可避免地产生误差, 导致求得的随机函数不再满足给定的自相关函数的条件假设, 为了消除这些误差, 采用窗函数以及平滑数据的方法来实现, 具体的内容在文献[1]中有详细的论述, 这里只引用相应的表达式。产生的随机功率谱函数的表达式为:

$$\text{Rand}(k_{x_1}, k_{x_3}) = \sqrt{\text{auto}(k_{x_1}, k_{x_3})} W(k_{x_1}, k_{x_3}) \cdot \exp[-i\theta(k_{x_1}, k_{x_3})] \quad (14)$$

其中 $W(k_{x_1}, k_{x_3})$ 是窗函数, 对式(14)进行逆 2-D Fourier 变换, 产生随机扰动

$$\sigma(x_1, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Rand}(k_{x_1}, k_{x_3}) e^{i(k_{x_1}x_1 + k_{x_3}x_3)} dx_1 dx_3 \quad (15)$$

再根据 σ 的均值和方差对(15)式进行规范化。求产生的采样数据的均值和方差采用如下表达式

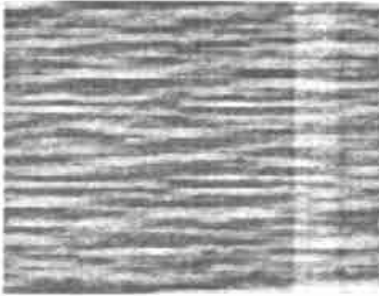
$$\bar{\xi} = \frac{1}{n \times n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_{ij}, \quad s_0^2 = \frac{1}{n \times n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\xi_{ij} - \bar{\xi})^2$$

其中 n 是两个坐标方向空间采用点数。至此, 已给出符合给定自相关函数、均值以及方差的平稳随机过程的采样数据 σ_{ij} 的求解过程, 这些数据随空间位置变化而变化。将 σ_{ij} 代入式(11)就得到符合给定自相关函数、均值以及方差的具有空间分布的裂纹数密度 v_j , 将 v_j 代入式(9)得到具有某种空间分布的随机材料弹性常数。

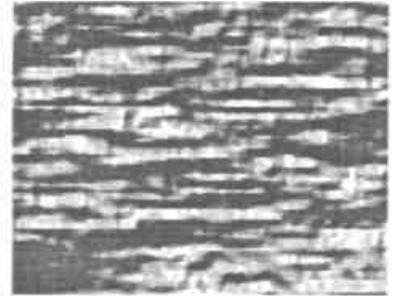
2 随机介质模拟

本文中, 背景裂纹数密度为 0.1, 扰动的均值为 0, 相对方差为 10%。按照上述方法, 模拟符合指数型椭圆自相关函数以及给定均值和方差的随机介质。选择自相关长度对 (a, b) 取值为 $(20, 1)$ 、 $(20, 10)$ 时产生不同特征的随机介质模型(以弹性常数 c_{11} 、 c_{33} 表示)。

图 1 是裂纹数密度符合指数椭圆型自相关函数, 自相关长度对 (a, b) 分别为 $(20, 1)$ 、 $(20, 10)$ 时的随机介质的裂纹数密度在空间分布的模型。从图 1 中发现, 通过选择自相关长度对可以灵活模拟裂纹数密度在空间分布的不同情况。本文给出的裂纹数密度的分布模型与文献[2]的随机介质模型有共同的特点。图 2、3 是对应两种不同的自相关长度对 $(20, 1)$ 、 $(20, 10)$ 时产生的随机介质模型。发现裂纹数密度的随机分布对不同的弹性常数有不同的影响, 也就是不同的弹性常数表现的统计数字特征不同, 这也说明了我们的模型可以将裂纹的微观参数(裂纹数密度)与随机裂纹介质的宏观性质(弹性常数)直接联系起来。通过改变自相关长度对的取值, 可以模拟在水平方向和垂直方向具有不同非均匀异常的平



(a) $(a, b) = (20, 1)$

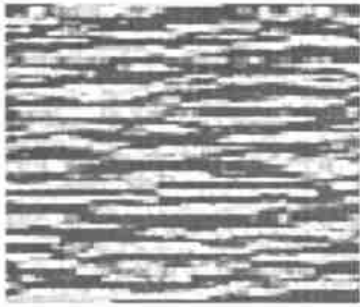


(b) $(a, b) = (20, 10)$

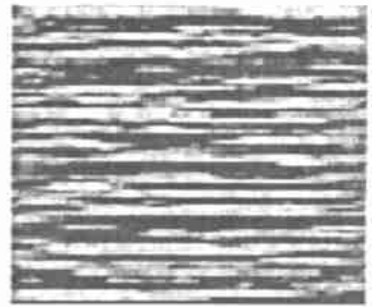
图 1 相关长度对取不同值时对应的裂纹数密度的空间分布

Fig. 1 Spatial distribution of the number density of the rocks under different autocorrelation length pairs

均尺度的随机介质。



(a) c_{11}



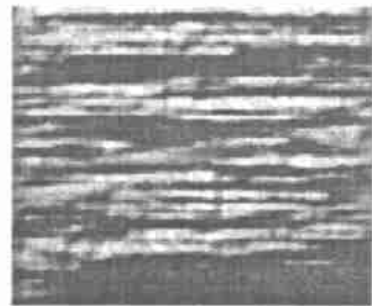
(b) c_{33}

图2 自相关长度对为(20, 1)的随机介质模型

Fig. 2 Random distributed fracture model for the autocorrelation length pair (20, 1)



(a) c_{11}



(b) c_{33}

图3 自相关函数为 $\text{auto}(x) = \exp(-\sqrt{x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2})$, 自相关长度对为(20, 10)的随机介质模型

Fig. 3 Random distributed fracture model for the autocorrelation length pair (20, 10)

3 结论

将含有随机分布裂纹数密度介质的微观裂纹参数(裂纹数密度)的变化与宏观性质(弹性常数)的变化直接联系,通过随机介质的模拟,对随机介质中随机分布的裂纹对介质的宏观参数的影响有了明确的认识。以二维指数型椭圆自相关函数为例,进行了二维随机介质模型的正演模拟;通过选择自相关函数以及少量的参数(自相关长度、均值及方差等),能够产生描述实际介质在小尺度上的非均匀性的随机介质,如各向同性、各向异性/层状介质;通过选择在水平方向和垂直方向上的自相关长度可以灵活地产生各种不同形式的随机介质。

参考文献:

- [1] Ikelle L T, Yung S K, Daube F. 2D random media with ellipsoidal autocorrelation function [J]. *Geophysics*, 1993, 58(9): 1359-1372.
- [2] 奚先, 姚姚. 随机介质模型的模拟与混合型随机介质[J]. *地球科学*, 2002, 27(1): 67-71.
- [3] Hudson J A. Waves speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks [J]. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1981, 64: 133-150.
- [4] Hudson J A. A higher order approximation to the wave propagation constants for cracked solid [J]. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1986, 87: 265-274.