第 25 卷第 2 期　国 防 科 技 大 学 学 报　JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY　Vol.25 No.2 2003

文章编号:1001-2486(2003)02-0025-05

火箭发动机可靠性增长评估的 Bayes 方法*

刘　琦,冯　静,周经伦

(国防科技大学人文与管理学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:针对火箭发动机分阶段试验,每阶段试验后对发动机出现的故障分析、归零的情况,提出等效试验数据的概念,结合 Bayes 方法对系统的可靠性增长试验进行评估,并在此基础上给出可靠度的增长分析,最后给出实例进行说明。

关键词:Bayes 方法;ML-II;等效试验次数;可靠性增长

中图分类号:O212.6;O212.8　　文献标识码:A

The Bayes Method for Rocket Engine Reliability Growth Evaluation

LIU Qi,FENG Jing,ZHOU Jing-lun

(College of Humanities and Management,National Univ. of Defense Technology,Changsha 410073,China)

Abstract:During the development of the rocket engine,the new engine is coming from the fault analysis and the removal of its predecessors. In this paper,the concept of equivalent test data is presented. Then,using the Bayesian method,with a few field test examples,the reliability of new products are evaluated. With the result of the stage reliability evaluation,the reliability growth of the system can be evaluated. A sample is given to illustrate the method.

Key words:Bayes method;ML-II(Maximum Likehood-II);equivalent test data;reliability growth

Bayes 方法已广泛应用于各种系统的可靠性分析中[1~4],其优点是便于利用当前的试验信息和先验信息,从而节省试验经费和时间,而且分析方法程式化,易于工程人员掌握。火箭发动机是集机、电、控、化等多学科于一体的复杂系统,其现场的可靠性试验量小,属于小子样系统。因此在进行系统的可靠性评估时,可采用 Bayes 方法。

为了评估发动机的性能、可靠性,需要对发动机进行一系列的试验,通过调研发现,国内外的发动机都采用定时截尾[2,3]寿命试验,选择不同的时间强度分别进行发动机的性能试车、可靠性试车等[8]。通过试车对出现的各种故障进行修正,这属于可靠性增长[3]。对发动机的可靠性增长研究是近年来发动机可靠性研究的一个重要课题,在现有的 Bayes 可靠性增长评估方法中,多引用增长因子[5,6,9],以此作为可靠性增长的标准进行评估,但是在多数情况下,增长因子由专家经验给出,这样不可避免地会引入主观因素,这是增长因子的一个不足之处。而 ML-II 方法[8]运用极大似然原理,在现有试验数据的基础上,在使边缘分布密度函数 $m(x|\pi)$ 达到最大的基础上,给出先验分布 π 的推断,该方法由于引入的主观信息少,所以多为 Bayes 学者和工程实践采用。

本文运用 Bayes 方法,直接利用发动的可靠性定时截尾试验数据,结合故障的归零[3]情况,运用 ML-II 方法得出先验分布的估计,以此为基础,对发动机各阶段的可靠性进行评估,并对发动机可靠性的增长情况进行分析。在文中给出了系统在某任务时间 t 可靠性的置信下限估计、点估计和区间估计结果。

1　符号说明

$(p_{i,j}, f_{i,j}, \tau_j)$:不同批次、截尾时间下发动机的试验数据;

$(n_{i,j}, r_{i,j}, \tau_j)$:不同批次、截尾时间下发动机的等效试验数据;

m:总的试验批数,$i = 1, \cdots, m$;

* 收稿日期:2002-10-23
作者简介:刘琦(1974—),男,博士生。

k：总的截尾时间数目，$j=1,\cdots,k$；

$p_{i,j}$：第 i 批试验第 j 个截尾时间下投入的样本个数；

$f_{i,j}$：第 i 批试验第 j 个截尾时间下样本的失效数；

$n_{i,j}$：第 i 批试验第 j 个截尾时间下投入的等效样本个数；

$r_{i,j}$：第 i 批试验第 j 个截尾时间下样本的等效失效数；

τ_j：第 j 个截尾时间，假设 $\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_k$；

$R_{i,j}$：第 i 批系统，在 τ_j 时刻的可靠度值；

$S_{i,j}$：第 i 批系统，τ_{j-1} 时刻所拥有的样本数量 $S_{i,j}=\sum_{m=j}^{k}n_{i,m}$。

进一步假设 $n_{i,j}$ 个样本中 $r_{i,j}$ 个失效样本，其失效时间包含于区间（τ_{j-1},τ_j」，定义 $\tau_0=0$，否则可通过数据转换将试验数据转换为这种形式。

2 首批试验后系统可靠性评定

为计算方便，在工程上选择 Beta 分布作为系统可靠性的先验分布，假设第 i 批系统，在 τ_j 时刻可靠度的先验分布为 $Be(R_{i,j};a_{i,j},b_{i,j})$，其中 $a_{i,j},b_{i,j}$ 未知。下面采用 ML-II[8] 方法确定首批产品的超参数 $a_{1,j}$、$b_{1,j}$。

因为系统的试验数据为定时截尾数据，而且由上面的假设，有理由认为，在 $\tau_j(j=1,\cdots,k)$ 时刻，有 $S_{i,j}$ 个样本投入试验，而失效数为 $r_{i,j}$。对首批试验数据来说，$p_{1,j}=n_{1,j}$，$f_{1,j}=r_{1,j}$，在二项分布假设下，似然函数为：

$$L(data\mid R_{1,j})=R_{1,j}^{S_{1,j}-r_{1,j}}(1-R_{1,j})^{r_{1,j}} \tag{1}$$

在 $R_{1,j}$ 的先验分布为 Beta 分布 $Be(R_{1,j};a_{1,j},b_{1,j})$ 的假设下，式(1)所示的似然函数为：

$$L(data\mid a_{1,j},b_{1,j})=\frac{\int_0^1 R_{1,j}^{S_{1,j}-r_{1,j}+a_{1,j}-1}(1-R_{1,j})^{r_{1,j}+b_{1,j}-1}\mathrm{d}R_{1,j}}{B(a_{1,j},b_{1,j})} \tag{2}$$

其中

$$B(a_{1,j},b_{1,j})=\int_0^1 R_{1,j}^{a_{1,j}-1}(1-R_{1,j})^{b_{1,j}-1}\mathrm{d}R_{1,j} \tag{3}$$

由

$$\frac{\partial L(data\mid a_{1,j},b_{1,j})}{\partial a_{1,j}}=0 \text{ 及 } \frac{\partial L(data\mid a_{1,j},b_{1,j})}{\partial b_{1,j}}=0 \tag{4}$$

可求出 $a_{1,j}$、$b_{1,j}$ 的 ML-II 估计 $\hat{a}_{1,j}$、$\hat{b}_{1,j}$。但由式(4)得不出 $\hat{a}_{1,j}$、$\hat{b}_{1,j}$ 的解析表达式，所以需采用数值解法，运用计算机进行迭代求解。由 Beta 先验分布的性质：$a_{1,j}$ 表示虚拟试验的成功次数，$b_{1,j}$ 表示虚拟试验的失效次数，所以在工程上通常选择给定 $\hat{b}_{1,j}$，运用计算机迭代求解 $\hat{a}_{1,j}$。

得出 $\hat{a}_{1,j}$、$\hat{b}_{1,j}$ 后，运用 Bayes 公式，结合式(1)可得出 $R_{1,j}$ 的后验分布：

$$\begin{aligned}\pi_{1,j}(R_{1,j}\mid data)&=\frac{R_{1,j}^{S_{1,j}-r_{1,j}+\hat{a}_{1,j}-1}(1-R_{1,j})^{r_{1,j}+\hat{b}_{1,j}-1}}{\int_0^1 R_{1,j}^{S_{1,j}-r_{1,j}+\hat{a}_{1,j}-1}(1-R_{1,j})^{r_{1,j}+\hat{b}_{1,j}-1}\mathrm{d}R_{1,j}}\\&=Be(R_{1,j};S_{1,j}-r_{1,j}+\hat{a}_{1,j},r_{1,j}+\hat{b}_{1,j})\end{aligned} \tag{5}$$

利用 $\pi_{1,j}(R_{1,j}\mid data)$ 就可对第一阶段系统在各截尾时间 $\tau_j(j=1,\cdots,k)$ 下的可靠性作出点估计、置信下限估计、区间估计等。

3 可靠性增长评定

在每一批试验后都对系统的故障进行分析、修正。对已经明确的故障模式进行归零，新系统的故障

模式通常是在前一阶段没有出现过的或者出现了但没有修正的。这样可以认为第一阶段故障归零[2,3]（该故障模式在以后的寿命试验中不会再现）后的试验数据和第二批试验数据来自同一总体，利用这些数据进行第二批系统的可靠性评估可以得到较为满意的结果。

假设经过故障归零后，前一阶段的试验数据由$(p_{1,j},f_{1,j},\tau_j)(j=1,\cdots,k)$变为$(n_{1,j},r_{1,j},\tau_j)(j=1,\cdots,k)$，其中 $p_{1,j}\leqslant n_{1,j},r_{1,j}\leqslant f_{1,j}(j=1,\cdots,k)$。以

$$(n_{2,j},r_{2,j},\tau_j)\triangleq(n_{1,j}+p_{2,j},r_{1,j}+f_{2,j},\tau_j)(j=1,\cdots,k) \tag{6}$$

作为第二阶段的试验数据，类似于首批试验后系统的可靠性评定，选择 Beta 分布 $Be(R_{2,j};a_{2,j},b_{2,j})$作为 $R_{2,j}(j=1,\cdots,k)$的先验分布，可得到第二阶段系统试验的似然函数：

$$L(data\mid a_{2,j},b_{2,j})=\frac{\int_0^1 R_{2,j}^{S_{2,j}-r_{2,j}+a_{2,j}-1}(1-R_{2,j})^{r_{2,j}+b_{2,j}-1}\mathrm{d}R_{2,j}}{B(a_{2,j},b_{2,j})} \tag{7}$$

依此类推，将前 i 阶段的等效试验数据求出，即可得到第 i 阶段试验后的似然函数：

$$L(data\mid a_{i,j},b_{i,j})=\frac{\int_0^1 R_{i,j}^{S_{i,j}-r_{i,j}+a_{i,j}-1}(1-R_{i,j})^{r_{i,j}+b_{i,j}-1}\mathrm{d}R_{2,j}}{B(a_{i,j},b_{i,j})} \tag{8}$$

(4)式可以改写成：

$$\frac{\partial L(data\mid a_{i,j},b_{i,j})}{\partial a_{i,j}}=0\ \text{及}\ \frac{\partial L(data\mid a_{i,j},b_{i,j})}{\partial b_{i,j}}=0 \tag{9}$$

解出 $\hat{a}_{i,j}$、$\hat{b}_{i,j}$，进而运用 Bayes 公式，得出第 i 阶段第 τ_j 截尾时刻可靠度的后验密度：

$$\pi_{i,j}(R_{i,j}\mid data)=Be(R_{i,j};S_{i,j}-r_{i,j}+\hat{a}_{i,j},r_{i,j}+\hat{b}_{i,j}) \tag{10}$$

4 可靠性寿命分布的拟合

得出各批次、各截尾时间下系统的后验密度 $\pi_{i,j}(R_{i,j}\mid data)(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k)$后，基于该函数，就可以对系统的可靠性做出各类推断。在此讨论置信下限估计、点估计和区间估计。

由 $\pi_{i,j}(R_{i,j}\mid data)(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k)$，运用不完全 Beta 函数[7]，可得出不同试验批次、不同截尾时间下系统的可靠性的点估计 $\hat{R}_{i,j,B}$ 在置信水平 α 下，系统的可靠性置信下限 $\hat{R}_{i,j,1-\alpha}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,k)$，以及置信区间估计$[\hat{R}_{i,j,1-\alpha,L},\hat{R}_{i,j,1-\alpha,U}]$。进一步，结合系统可靠性的寿命分布为 Weibull 分布，运用最小二乘法，即求解(11)式，得出 Weibull 分布的参数估计 $\hat{m}_i,\hat{\eta}_i$。

$$\min\sum_{j=1}^{k}\left(\hat{R}_{i,j,1-\alpha}-\exp\left[-\left(\frac{\tau_j}{\eta_i}\right)^{m_i}\right]\right)^2\quad(i=1,\cdots,m) \tag{11}$$

求解得到 $\hat{m}_i,\hat{\eta}_i$，如下：

$$b_i=\frac{\sum_{j=1}^{k}x_j^2\sum_{j=1}^{k}y_{i,j}-\sum_{j=1}^{k}x_j\sum_{j=1}^{k}x_jy_{i,j}}{k\sum_{j=1}^{k}x_j^2-\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2}\quad(i=1,\cdots,m) \tag{12}$$

$$\hat{m}_i=\frac{k\sum_{j=1}^{k}x_jy_{i,j}-\sum_{j=1}^{k}x_j\sum_{j=1}^{k}y_{i,j}}{k\sum_{j=1}^{k}x_j^2-\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2}\quad(i=1,\cdots,m) \tag{13}$$

$$\hat{\eta}_i=\exp\left(-\frac{b_i}{\hat{m}_i}\right)\quad(i=1,\cdots,m) \tag{14}$$

其中

$$y_{i,j}=\ln\ln\frac{1}{\hat{R}_{i,j,1-\alpha}},x_j=\ln(\tau_j)$$

将 $\hat{m}_i$，$\hat{\eta}_i$ 带入 Weibull 函数，得到在给定任务时间 t 下可靠性的置信下限估计

$$\hat{R}_{i,1-\alpha}(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\hat{\eta}_i}\right)^{\hat{m}_i}\right]$$

类似地，将 $y_{i,j} = \ln\ln\frac{1}{\hat{R}_{i,j,1-\alpha}}$ 中的 $\hat{R}_{i,j,1-\alpha}$ 替换为可靠性的点估计 $\hat{R}_{i,j,B}$，求解出 $\hat{m}_i$，$\hat{\eta}_i$，代入 Weibull 函数，可得到在给定任务时间 t 下可靠性的点估计

$$\hat{R}_{i,B}(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\hat{\eta}_i}\right)^{\hat{m}_i}\right]$$

将 $y_{i,j} = \ln\ln\frac{1}{\hat{R}_{i,j,1-\alpha}}$ 中的 $\hat{R}_{i,j,1-\alpha}$ 分别替换为可靠性置信区间的上下限 $\hat{R}_{i,j,1-\alpha,L}$，$\hat{R}_{i,j,1-\alpha,U}$，分别求解出 $\hat{m}_{i,L}$，$\hat{\eta}_{i,L}$，$\hat{m}_{i,U}$，$\hat{\eta}_{i,U}$，代入 Weibull 函数，可得到在给定任务时间 t 下可靠性的区间估计

$$\left[\exp\left[-\left(\frac{t}{\hat{\eta}_{i,L}}\right)^{\hat{m}_{i,L}}\right],\exp\left[-\left(\frac{t}{\hat{\eta}_{i,U}}\right)^{\hat{m}_{i,U}}\right]\right]$$

得出各阶段可靠性分布的置信下限估计、点估计后，就可以对可靠性的增长情况进行分析，做出可靠性增长曲线等。

5　举例

通过计算机模拟得到某发动机 2 批 3 个截尾时间的试验数据如表 1 所示，由于在第一次试验后对出现的一部分故障进行修正，其中：第一批的 120s 截尾试验的 2 个故障全部归零，300s 的 5 个故障 4 个归零，500s 的 4 个故障 2 个归零，得出表 2 所示的等效试验次数。表 3 列出了在分别给定 $\hat{b}_{i,j}$ 为 5 和 8 下第一、二批产品的 $\hat{a}_{i,j}$、$\hat{b}_{i,j}$（$i = 1,2$；$j = 1,2,3$）。根据 Beta 分布的性质，在表 4 列出了不同批次，3 个阶段系统的 0.7 置信下限估计和点估计。由式（12）～（14）求出 Weibull 分布的形状参数 m 和尺度参数 η，得出：

在可靠度点估计下，$\hat{m}_1 = 1.686$，$\hat{\eta}_1 = 540.063$；在置信下限估计下，$\hat{m}_1 = 1.715$，$\hat{\eta}_1 = 480.296$。

在可靠度点估计下，$\hat{m}_2 = 2.027$，$\hat{\eta}_2 = 823.057$；在置信下限估计下，$\hat{m}_2 = 2.004$，$\hat{\eta}_2 = 772.019$。

而本例的真实数据为：$m_1 = 2$，$\eta_1 = 500$；$m_2 = 2$，$\eta_2 = 800$ 的 Weibull 分布，通过比较分析，可见该算法的计算精度较高，比较符合实际情况。

表 1　发动机的可靠性增长试验数据

Tab.1　The rocket engine reliability growth test result

	截尾时间 1(120)		截尾时间 2(300)		截尾时间 3(500)	
	样本数	失效数	样本数	失效数	样本数	失效数
第一批	24	2	14	4	6	4
第二批	24	1	14	3	6	2

表 2　归零后的等效试验数据

Tab.2　The equivalent test data after failure modes eliminated

	截尾时间 1(120)		截尾时间 2(300)		截尾时间 3(500)	
	样本数	失效数	样本数	失效数	样本数	失效数
第一批	24	2	14	3	6	4
第二批	48	1	28	3	12	4

表 3　先验分布超参数的 ML-II 估计

Tab.3　The ML-II evaluation result of prior distribution super parameters

	截尾时间 1(120)		截尾时间 2(300)		截尾时间 3(500)	
	$\hat{a}_{ij}$	$\hat{b}_{ij}$	$\hat{a}_{ij}$	$\hat{b}_{ij}$	$\hat{a}_{ij}$	$\hat{b}_{ij}$
第一批	55.395	5	12.96	5	2.975	5
第二批	373.13	8	67.42	8	16.44	8

表 4　可靠度的点估计和 0.7 置信下限估计

Tab.4　The reliability point evaluation and lower confidence limit evaluation(the confidence level = 0.7)

	截尾时间 1(120)		截尾时间 2(300)		截尾时间 3(500)	
	点估计	**置信下限**	**点估计**	**置信下限**	**点估计**	**置信下限**
第一批	0.917	0.903	0.7496	0.711	0.356	0.28
第二批	0.979	0.975	0.894	0.879	0.671	0.63

参 考 文 献：

[1]　张金槐,唐雪梅.Bayes 方法[M].长沙:国防科技大学出版社,1990.

[2]　周源泉,翁朝曦.可靠性评定[M].北京:北京科学出版社,1990.

[3]　梅启智,廖炯生,孙惠中.系统可靠性工程基础[M].北京:科学出版社,1992.

[4]　唐雪梅,张金槐,邵凤昌,等.武器装备小子样试验分析与评定[M].北京:国防工业出版社,2001.

[5]　党小玲.柔性制造系统可靠性增长管理与分析技术研究[D].博士学位论文,1999.

[6]　田国梁.二项分布可靠性增长模型[J].宇航学报,1992(1):55－61.

[7]　《现代数学手册》随机数学卷[S].武汉:华中科技大学出版社,1999.

[8]　刘国求,等.液体火箭发动机原理[M].北京:宇航出版社,1987.

[8]　Berger J O. Statistical decision theory and Bayesian analysis(second edition)[M].Springer-Verlag New York,Inc.,1985.

[9]　Maurizio Guida, Gianpaolo Pulcini. Automotive reliability inference based on past data and technical knowledge[J]. Reliability Engineering and System Safety,76:129－137,2002.