文章编号: 1001－2486(2003)04－0093－04

# 一种基于单频 GPS 接收机的精确快速相对定位方法*

刘志俭, 胡小平, 贺汉根

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要: 研究了模糊度求解的两个阶段, 即模糊度估计和模糊度搜索, 通过改进的矩阵解耦算法和 OMEGA 算法, 提高了模糊度求解的速度。通过实验证明, 在 2～3min 内就可以正确求解模糊度, 并且可以基本达到实时运算。

关键词: GPS; 载波相位; 相对定位

中图分类号: V249.32　　文献标识码: A

# A Precise and Rapid Method for Relative Positioning Based on Single Frequence GPS Receivers

LIU Zhi-jian, HU Xiao-ping, HE Han-gen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The two stages of the ambiguity solution, ambiguity estimation and ambiguity search, have been researched on. Through the improved matrix decouple method and OMEGA method, the speed of the ambiguity solution has increased. It is proved that ambiguity solution can be made correctly in two to three minutes and computed almost in real time.

**Key words:** GPS; carrier phase; relative positioning

利用 GPS 载波相位测量可以精确确定两个载体间的相对距离, 可广泛应用于炮兵阵地联测、舰艇进出港口的精确导航、飞机精密进场导航、航空摄影和航空物探、海洋石油勘探和平台定位、水下地形测绘、智能车辆指挥调度系统等方面, 其核心问题是整周模糊度的准确快速求解[1,2]。

一般来说, 整周模糊度求解可分为三个步骤: 第一为模糊度估计; 第二为模糊度搜索; 第三为模糊度确认。本文着重研究了前两个问题, 给出了一种基于单频 GPS 接收机的精确快速相对定位方法。

## 1　模糊度估计的快速逼近算法

当空中观测到卫星数为 $m$ 时, 每一个历元可以建立 $m-1$ 个双差方程。对于第 $K$ 个历元, 可以得到双差方程组:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_K \cdot \boldsymbol{X}_K + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{L}_K \\ \mathrm{E}(\boldsymbol{e}) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{Q} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_K$ 为第 $K$ 个历元的双差方程组的系数矩阵, 行数为 $m-1$, 列数为 3, 每行的 3 个元素代表基准站到某一颗卫星的单位矢量; $\boldsymbol{X}_K$ 为第 $K$ 个历元的两个接收机之间的三维位置矢量, 阶数为 3; $\boldsymbol{N}$ 为载波相位的双差整周模糊度向量, 阶数为 $m-1$, 在不发生周跳的情况下, 该向量是一个常值向量; $\boldsymbol{L}_K$ 为载波相位的双差观测向量, 阶数为 $m-1$, 为第 $K$ 个历元的载波相位观测值的双差; $\boldsymbol{e}$ 为载波相位双差观测方程的观测噪声, 阶数为 $m-1$。

对于 $n$ 个历元来说, 忽略观测噪声, 得到相应的法方程为

* 收稿日期: 2003－03－18
作者简介: 刘志俭(1975—), 男, 博士生。

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & E \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & E \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n & E \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n & nE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \\ \sum_{i=1}^{n} L_i \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中 $E$ 为单位阵, 阶数为 $m-1$。通过观察可以发现, 如果直接在此方程组上进行最小二乘求解, 需要求逆的矩阵的阶数为 $[(m-1)\times(n+1)]\times(3n+m-1)$, 显然这是无法实时完成的。

俞文伯等在文献[3] 中提出了一种矩阵解耦算法, 其本质在于将 $n$ 个历元集中的最小二乘求解转化为每一个历元分别计算, 从而极大地降低了计算量, 提高了计算效率, 达到了实时计算的目的。但是文章中忽略了双差观测量的协方差阵 $Q$, 导致不加区别地使用所有的观测, 从而延长了模糊度的逼近时间。

引入双差观测的协方差阵 $Q$, 可以将模糊度向量表示为

$$\hat{N} = \left[\sum_{K=1}^{n}\left(A_K\left(A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1}A_K\right)^{-1}A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1} - E\right)\right]^{-1}\sum_{K=1}^{n}\left(A_K\left(A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1}A_K\right)^{-1}A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1} - E\right)L_K \tag{3}$$

令 $B_K = A_K\left(A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1}A_K\right)^{-1}A_K^{\mathrm{T}}Q^{-1} - E$, 方程(3) 可以表示为

$$\hat{N} = \left[\sum_{K=1}^{n}B_K\right]^{-1}\sum_{K=1}^{n}B_KL_K \tag{4}$$

从(4) 式中可以看出, 当空中可观测的卫星数为 6～ 11 颗时, $B_K$ 方阵的实际阶数为 5～ 10 阶, 每一历元的求逆计算量仅为一个三阶方阵和一个 5～ 10 阶方阵。

## 2 优化的模糊度搜索算法

模糊度搜索过程中, 必须计算搜索空间的所有模糊度组合的残差二次型, 因此搜索和计算方法均会影响模糊度的搜索速度。Donghyun Kim 等人提出的基于最小二乘搜索算法[4] 的 OMEGA(Optimal Method for Estimating GPS Ambiguity) 算法[5] 有效地提高了残差二次型的计算效率, 下面给出这种方法的推导。为了方便分析, 略去下标 $k$, 并假设双差方程组的维数为 $n$, 将方程(1) 重写如下:

$$A\cdot X + N + e = L,\quad \mathrm{E}(e) = 0,\quad \mathrm{Cov}(e) = Q \tag{5}$$

根据最小二乘搜索算法可以得到残差的表示形式为

$$v = (I - AA^{*})L' \qquad L' = \left[L'_p \quad L'_s\right]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

其中 $A^{*} = \left(A^{\mathrm{T}}Q^{-1}A\right)^{-1}A^{\mathrm{T}}Q^{-1}$, $L'_p = 0$, $L'_s = L_s + S(L_p - N_p) - N_s$, $N_p \in Z^3$, $N_s \in Z^{m-1}$, $N_s = round(L_s - S(L_p - N_p))$, $X_p = -A_p^{-1}N_p$, $S = A_sA_p^{-1}$, 下标 $p$ 表示计算使用的主星, 下标 $s$ 表示其余的卫星;

$A_p$ 为 $3\times 3$ 的矩阵, $A_s$ 为 $(n-3)\times 3$ 的矩阵;

$N_p$ 为 $3\times 1$ 的主星双差模糊度矢量, $N_s$ 为 $(n-3)\times 1$ 的其余卫星的双差模糊度矢量;

通过矩阵 $A$ 行之间的交换, 可以将 $A$ 与 $A_p$、$A_s$ 以及 $N$ 与 $N_p$、$N_s$ 之间的关系表示为

$$A = \left[A_p \quad A_s\right]^{\mathrm{T}},\quad N = \left[N_p \quad N_s\right]^{\mathrm{T}}$$

根据以上公式, 残差二次型可以表示为

$$v^{\mathrm{T}}Q^{-1}v = L'^{\mathrm{T}}\Sigma L' \tag{7}$$

其中

$$\Sigma = (I - AA^{*})^{\mathrm{T}}Q^{-1}(I - AA^{*}) \tag{8}$$

对式(8) 进行矩阵分解可以得到

$$\Sigma = E\Lambda E^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

其中 $E$ 为 $n\times(n-3)$ 阶矩阵, 由 $n-3$ 个 $n\times 1$ 阶特征向量 $E_1, E_2, \cdots, E_{n-3}$ 构成, $\Lambda$ 为 $(n-3)\times(n-3)$

阶对角矩阵, 包含矩阵 Σ 的 $n-3$ 个特征值。将式(9) 带入式(7) 得到

$$v^{T}Q^{-1}v = \omega^{T}\Lambda\omega = \sum_{i=1}^{n-3}\lambda_i\omega \tag{10}$$

其中 $\omega = E^{T}L'$。

将残差 $v$ 写为分块矩阵为

$$v = \begin{bmatrix} v_p \\ v_s \end{bmatrix} = (I - AA^{*})\begin{bmatrix} 0 \\ L'_s \end{bmatrix} \tag{11}$$

令

$$G = (I - AA^{*}) = \begin{bmatrix} G_{pp} & G_{ps} \\ G_{sp} & G_{ss} \end{bmatrix}$$

由式(11) 可以得到

$$v_p = G_{ps}G_{ss}^{-1}v_s \tag{12}$$

$$v_s = G_{ss}\omega \tag{13}$$

令

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} P_{pp} & P_{ps} \\ P_{sp} & P_{ss} \end{bmatrix}$$

则相应的残差二次型为

$$v^{T}Q^{-1}v = v_p^{T}P_{pp}v_p + v_s^{T}P_{sp}v_p + v_p^{T}P_{ps}v_s + v_s^{T}P_{ss}v_s \tag{14}$$

令 $U = G_{ps}G_{ss}^{-1}$, 并将式(12)、(13) 代入式(14) 得到

$$v^{T}Q^{-1}v = v_s^{T}Rv_s = L_s'^{T}\Omega L'_s \tag{15}$$

其中 $R = U^{T}P_{pp}U + U^{T}P_{ps} + P_{sp}U + P_{ss}$, $\Omega = G_{ss}^{T}RG_{ss}$。

由于 Ω 的计算简单, 在应用式(15) 计算残差二次型时, 不需要每次都计算残差向量 $v$, 因此计算将变得简单, 从而达到加快模糊度搜索的目的。

## 3　实验方法及结果

为了更好地验证算法的性能, 采用 CMC ALLStar 接收机, P4 2.0GHz 个人计算机, VC++ 编译环境, 使用事后处理的方法, 针对长度为 267.34m 的基线, 对第二和第三部分中的算法进行了验证。有关 CMC ALLStar 接收机的详细性能请参见公司网站。

### 3.1　对模糊度估计算法的验证

采集180个历元用于对模糊度进行估计, 图1给出了2号卫星和25号卫星之间的双差模糊度的逼近过程, 表1给出了相应的计算时间。

表 1　模糊度估计的时间比较

Tab.1　The compare of ambiguity estimate time

| | 使用 60 个历元计算 | 使用 120 个历元计算 | 使用 180 个历元计算 |
|---|---|---|---|
| 原始算法计算时间 | 15.25s | 90.73s | 537.34s |
| 本文算法计算时间 | 0.31s | 0.63s | 0.97s |

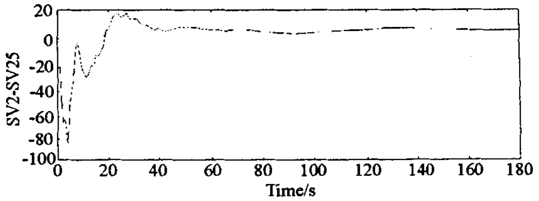


图 1　双差模糊度的逼近过程

Fig.1　The approach process of double difference ambiguity

### 3.2　对模糊度搜索算法的验证

采用最小二乘方法, 针对原始的残差二次型计算方法与改进后的残差二次型计算方法进行了比较, 表 2 给出了对于三组不同数据的计算时间比较。

## 3.3 相对定位结果

采用本文改进之后的算法,进行了相对定位试验,图 2 给出了定位结果,基线矢量基准由 RTK(Real Time Kinematic) 商用软件提供,为(247.591; 56.432; 83.592)。

表 2 模糊度搜索算法的时间比较

Tab.2 The compare of ambiguity search time

| | 第 1 组数据 | 第 2 组数据 | 第 3 组数据 |
|---|---|---|---|
| 原始残差计算时间 | 4.15s | 5.22s | 3.87s |
| 本文残差计算时间 | 1.53s | 1.97s | 1.39s |

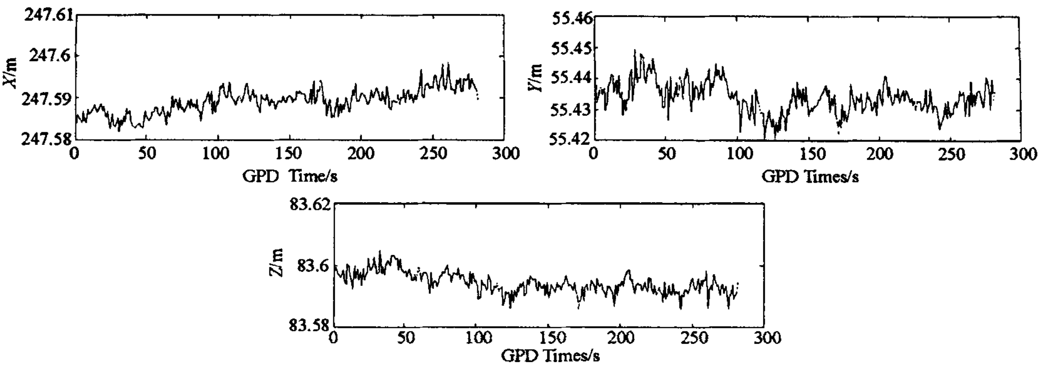


图 2 基线矢量解算结果

Fig.2 The result of baseline vector

## 4 结 论

从上面的试验结果可以看出:

(1) 在模糊度估计阶段,使用改进算法,计算量明显小于传统的基于最小二乘的模糊度估计算法,可以达到对模糊度的实时估计,并且在 2 ~ 3min 就可以迅速衰减到距离真实值 3 ~ 4 个波长的位置;

(2) 在模糊度的搜索阶段,通过提出的算法,可以使计算效率提高 63% 左右。

显然,通过改进的矩阵解耦算法和 OMEGA 算法显著地提高了模糊度估计和模糊度搜索的计算效率,从而使模糊度的求解基本达到实时运算。

## 参 考 文 献:

[1] Cohen C E. Attitude Determination Using GPS[D]. Ph.D Dissertation, Stanford University, Stanford, CA, Dec. 1992.

[2] El-Mowafy Ahmed, Schwarz K P. Epoc-by-Epoc Ambiguity Resolution for Real-time Attitude Determination Using a GPS Multiantenna System[J]. Journal of The Institute of Navigation, 1995, 42(2).

[3] 俞文伯, 高国江, 等. 单频 GPS 动态相对定位的模糊度逼近 / 搜索算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, (4).

[4] Hatch R. Instantaneous Ambiguity Resolution[C]. Proceedings of KIS' 90, Banff, Canada, September 10 - 13: 299 - 308.

[5] Kim Donghyun, Langley R B. A Search Space Optimization Technique for Improving Ambiguity Resolution and Computational Efficiency[C]. Proceedings of ION GPS' 99, Nashville, Tennessee, 14 - 17 September: 1579 - 1588.

[6] 王银华. 利用载波相位信息确定载体姿态的技术研究[D]. 国防科技大学, 2000.