文章编号: 1001－2486(2003)04－0107－04

考虑验前信息可信度时的 Bayes 估计*

李鹏波, 谢红卫, 张金槐
(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 研究了考虑验前信息可信度时的验前分布和 Bayes 估计算法, 给出了正态总体参数的 Bayes 估计方法。以导弹落点散布的估计为例, 说明了考虑验前信息可信度时 Bayes 估计有明显的改善, 即具有更好的可信度。

关键词: Bayes 估计; 验前信息; 可信度; 导弹落点散布
中图分类号: O218.8　　文献标识码: A

Bayesian Estimation while Considering the Credibility of the Prior Information

LI Peng-bo, XIE Hong-wei, ZHANG Jin-huai
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: By considering the credibility of the prior information, a new Bayesian estimation algorithm is studied, and the estimation of normal distribution parameters is provided. Taking the estimation of the dispersion of the missile falling points as an example, the conclusion is drawn that by considering the credibility of the prior information, the new algorithm of Bayesian estimation is obviously improved, that is, it is of a better credibility.

Key words: Bayesian estimation; prior information; confidence level; dispersion of the missile falling points

在小子样情况下, 我们常常用 Bayes 方法对未知的分布参数进行统计分析。即利用验前信息, 由验前子样 $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, \cdots, X_{n_0}^{(0)}\}$ 得到参数 θ 的分布密度函数 $\pi_0(\theta)$, 然后再在获得现场试验子样 $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$ 后, 由 Bayes 公式得到 θ 的验后分布, 从而得到一定损失函数之下 θ 的 Bayes 估计。以正态总体的分布参数为例, 对于未知参数 μ, $\sigma^2 = D$ 作 Bayes 估计。记 $\theta = (\mu, D)$ 的验前分布为正态—逆 Gamma 分布, 由共轭分布, θ 的验后密度也为正态—逆 Gamma 函数。因此得到验后的分布参数中的正态分布参数为

$$\mu_1 = \frac{n_0 \bar{X}^{(0)} + n\bar{X}}{n_0 + n}, \quad \eta_1 = \frac{1}{n_0 + n} \tag{1}$$

式中 $\bar{X}^{(0)}$, $\bar{X}$ 分别为验前子样、现场子样的样本均值。当 $n_0 >> n$ 时, 则 $\mu_1 \approx \bar{X}^{(0)}$。这说明当验前子样样本数很大时, 验前子样的信息将"淹没"现场试验子样, 或者是当验前信息失真时, 将使 Bayes 估计出现较大偏差。现场试验子样是完全可信赖的, 而验前信息一般是通过历史资料信息、理论分析和仿真试验等方法得到的, 存在可信性的问题。关于验前信息可信度计算的方法可参见文献[3、4]。

1 考虑验前信息可信度时的验前、验后分布

若在确定验前分布时, 要考虑验前信息的可信度, 那么验前信息的分布族可以表示为

$$\Gamma = \{\pi: \pi = (1-\varepsilon)\pi_0 + \varepsilon q, q \in D\} \tag{2}$$

其中 D 为所有的分布集, $0 < \varepsilon < 1$。这种验前分布族的取法毕竟太宽了。我们说现场试验子样是完全可信赖的, 若通过验前子样 $X^{(0)}$ 与现场试验子样 X 的一致性检验得到了验前信息的可信度 P_0, 就可以考

* 收稿日期: 2003－01－12
基金项目: 航天支撑技术基金资助(2001－HT－GFKD－09)
作者简介: 李鹏波(1970—), 男, 副教授, 博士。

虑用现场试验子样拟合的分布 π_1 对 π_0 进行修正, 这是一种验前信息加权融合的思想, 即

$$\pi(\theta) = \varepsilon_0 \pi_0(\theta) + \varepsilon_1 \pi_1(\theta) \tag{3}$$

其中 $\varepsilon_0 = P_0$, $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_0$。

这样, θ 的验后分布为

$$\pi(\theta \mid X) = \frac{1}{f(X \mid \pi)} \sum_{i=0}^{1} \varepsilon_i \pi_i(\theta \mid X) f(X \mid \pi_i) \tag{4}$$

其中 $f(X \mid \pi) = \sum_{i=0}^{1} \varepsilon_i f(X \mid \pi_i)$。

记

$$\lambda_i = \frac{\varepsilon_i f(X \mid \pi_i)}{f(X \mid \pi)}, \quad i = 0, 1$$

于是 θ 的验后分布可表示为

$$\pi(\theta \mid X) = \sum_{i=0}^{1} \lambda_i \pi_i(\theta \mid X) \tag{5}$$

2 正态总体参数的 Bayes 估计

设有 $N(\mu, \sigma^2)$ 总体, 其中 μ, $\sigma^2 = D$ 是未知的, $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$ 为 i. i. d 样本, 记样本均值及方差为

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2 \tag{6}$$

则 (X, S^2) 为 (μ, D) 的充分统计量。记 $\theta = (\mu, D)$ 的验前分布为正态 —逆 Gamma 分布, 即

$$\pi(\theta) = \pi(\mu, D) = \pi(\mu \mid D) \pi(D) \tag{7}$$

其中 $\pi(D)$ 为 D 的验前密度, 它为逆 Gamma 分布, 即

$$\pi(D) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} D^{-(\beta_0 + 1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}}, \quad \alpha_0 > 0, \beta_0 > 0 \tag{8}$$

其中 α_0, β_0 为 $\pi(D)$ 的分布参数, 而 $\pi(\mu \mid D)$ 为 $N(\mu_0, \eta_0 D)$ $(\eta_0 > 0)$ 分布密度, 即

$$\pi(\mu \mid D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_0 D}} D^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\eta_0 D}(\mu - \mu_0)^2} \tag{9}$$

我们先确定验前分布的参数, 若得到了验前子样 $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, \cdots, X_{n_0}^{(0)}\}$, 在不考虑验前子样的可信度时, 验前分布为

$$\pi(\theta) = \pi_0(\mu, D) = \pi_0(\mu \mid D) \pi_0(D)$$

正态 —逆 Gamma 分布的参数分别为

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0} (X_i^{(0)} - X^{(0)})^2, \quad \beta_0 = \frac{1}{2}(n_0 - 1)$$

$$\mu_0 = X^{(0)}, \quad \eta_0 = \frac{1}{n_0}$$

若考虑验前子样的可信度, 即验前子样和现场子样进行一致性检验, 得到的验前分布为

$$\pi(\theta) = \varepsilon_0 \pi_0(\theta) + \varepsilon_1 \pi_1(\theta)$$

其中 $\varepsilon_0 = P_0$, $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon_0$。$\pi_1(\theta)$ 也是正态 —逆 Gamma 分布, 参数为

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X)^2, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(n - 1)$$

$$\mu_1 = X, \quad \eta_1 = \frac{1}{n}$$

那么

$$\pi_0(\mu, D) \sim N\left(X^{(0)}, \frac{D}{n_0}\right) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_0, \beta_0) \tag{10}$$

$$\pi_1(\mu, D) \sim N\left(X, \frac{D}{n}\right) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_1, \beta_1) \tag{11}$$

在上述假设之下，由于 θ 的验前和验后密度为共轭的，它们为正态 —逆 Gamma 函数。

$$\pi(\mu, D \mid X) \sim \lambda_0 \pi_0(\mu, D \mid X) + \lambda_1 \pi_1(\mu, D \mid X) \tag{12}$$

其中

$$\pi_0(\mu, D \mid X) \sim N(\mu_0^{(1)}, \eta_0^{(1)} D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)})$$

$$\pi_1(\mu, D \mid X) \sim N(\mu_1^{(1)}, \eta_1^{(1)} D) \cdot \Gamma^{-1}(\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)})$$

$$\mu_0^{(1)} = \frac{n_0 X^{(0)} + nX}{n_0 + n}, \quad \eta_0^{(1)} = \frac{1}{n_0 + n}$$

$$\alpha_0^{(1)} = \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{1}{2} \frac{n_0 n(X - X^{(0)})}{n_0 + n}, \quad \beta_0^{(1)} = \frac{n_0 + n - 1}{2}$$

$$\mu_1^{(1)} = X, \quad \eta_1^{(1)} = \frac{1}{2n}$$

$$\alpha_1^{(1)} = 2\alpha_1, \quad \beta_1^{(1)} = \beta_1 + \frac{n}{2}$$

这样，μ 的验后边缘密度为

$$\pi(\mu \mid X) = \int_0^{+\infty} \pi(\mu, D \mid X)\, \mathrm{d}D \tag{13}$$

而 D 的验后边缘密度为

$$\pi(D \mid X) = \int_0^{+\infty} \pi(\mu, D \mid X)\, \mathrm{d}\mu \tag{14}$$

如果应用平方损失函数，则 μ 和 D 的 Bayes 估计分别为下列条件期望：

$$\hat{\mu} = \mathrm{E}[\mu \mid X], \quad \hat{D} = \mathrm{E}[D \mid X]$$

经过推导，得出

$$\hat{\mu}_{W-Bayes} = \lambda_0 \mu_0^{(1)} + \lambda_1 \mu_1^{(1)}, \quad \hat{D}_{W-bayes} = \lambda_0 D_0^{(1)} + \lambda_1 D_1^{(1)} \tag{15}$$

其中

$$D_0^{(1)} = \alpha_0^{(1)} \left[\frac{\Gamma(\beta_0^{(1)} - 0.5)}{\Gamma(\beta_0^{(1)})}\right]^2, \quad D_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \left[\frac{\Gamma(\beta_1^{(1)} - 0.5)}{\Gamma(\beta_1^{(1)})}\right]^2$$

3 应用举例：导弹落点散布的估计

对于导弹这样的大型复杂系统，由于现场试验周期长，费用昂贵，因此现场试验次数是非常有限的。设某型中远程导弹获得了现场试验子样 $X = \{3000.6465, 3000.3850, 2999.2739, 3001.6144, 3001.4049\}$（单位：km），导弹落点位置服从正态分布，即 $X \sim N(\mu, D)$，其中 μ, D 均为未知的，则由经典方法得到的估计为 $\hat{\mu} = \bar{X} = 3000.2649$，$\hat{D} = s^2 = 0.7162$。若获得了该型号导弹落点位置的验前子样，即 $X^{(0)} = \{3002.2678, 3002.5751, 2999.8821, 2999.4107, 2999.3466, 3001.6285, 2997.9370, 3001.2090, 3000.8380, 3000.1627, 3000.3245, 2999.7684, 3000.0607, 2999.3163, 3001.0427, 2999.0967, 2998.6764, 2999.8534, 3000.2154, 3000.2819\}$，其子样容量为 $n = 20$。则根据经典的 Bayes 估计，我们得到落点散布的估计为 $\hat{D}_{Bayes} = 1.1867$。而考虑验前信息的可信度时，则由式(15) 得到的估计为 $\hat{D}_{W-Bayes} = 0.9192$。那么，这两个估计值哪个更合理些，我们不妨通过仿真分析进行比较。

从正态总体 $N(\mu, D)$ 中模拟产生验前子样，总体均值均取为 $\mu = 0$，而方差则分别取不同的值。这样就可考察不同可信度的验前子样对估计结果的影响。仿真分析的结果如表 1 所示，表中 $\hat{D}_{Bayes}$ 表示经典的 Bayes 估计算法，$\hat{D}_{W-Bayes}$ 表示基于验前信息可信度加权的 Bayes 估计算法。

从表 1 可以看出, Bayes 估计受验前信息的影响较大, 当验前信息可信度不高时, 传统的 Bayes 方法估计值偏离真值较远, 而考虑了可信度的 Bayes 估计值却是稳定的, 其绝对误差要小很多(在概率意义下) 。因为验前子样的容量大于现场试验子样, 而传统的 Bayes 方法又把验前信息同现场试验信息等同起来, 这样当验前子样数特别大时, 将完全“ 淹没” 现场试验信息。这是我们不希望看到的结果。若考虑验前信息的可信度, 就可避免这种情况的发生。这样既加强了现场试验子样的“ 权重” , 又充分利用了验前信息, 使得小子样 Bayes 估计的结果具有更好的可信度。

表 1 考虑或不考虑验前信息可信度的两种 Bayes 估计算法之间的比较

Tab. 1 The comparison of two algorithms of Bayes estimation, considering the credibility of prior information or not

$N(\mu, D)$	$\hat{D}_0$	P_0	λ_0	$\hat{D}_{Bayes}$	$\hat{D}_{W-Bayes}$
$N(0, 0.6)$	0.3791	0.3163	0.2401	0.4480	0.6940
$N(0, 0.7)$	0.6879	0.8925	0.8798	0.6972	0.7457
$N(0, 0.8)$	0.4246	0.4205	0.2906	0.5043	0.6970
$N(0, 0.9)$	0.7888	0.9147	0.9004	0.7753	0.8204
$N(0, 1.0)$	0.1932	0.6576	0.5365	1.0839	0.9735
$N(0, 1.1)$	0.8567	0.9224	0.8811	0.8556	0.8945
$N(0, 1.2)$	1.7856	0.1490	0.0517	1.5728	0.8096
$N(0, 1.3)$	1.9468	0.0593	0.0173	1.6900	0.7803
$N(0, 1.4)$	1.5212	0.2975	0.1525	1.3465	0.8650
$N(0, 1.5)$	1.7526	0.5690	0.2036	1.6138	0.9575
$N(0, 2.0)$	3.7490	0	0	2.9963	0.7623

参 考 文 献:

[1] Berger J O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis(Second Edition) [M]. Springer-Verlag, 1985.
[2] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法(修订版) [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
[3] 李鹏波, 张士峰. 关于仿真可信性的度量[J]. 计算机仿真, 2000, (1): 19- 21.
[4] 唐雪梅, 王仁春. 小样本情况下仿真模型的验证方法[J]. 系统仿真学报, 2002, (10): 1263- 1265.