

文章编号: 1001 - 2486(2003)05 - 0009 - 05

## 用非线性规划求解有限推力最优交会\*

王 华, 唐国金

(国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 利用非线性规划方法研究了航天器的有限推力最优交会问题。这种方法利用了近年来发展起来的直接优化技术, 用分段多项式来表示整个轨道的状态和控制向量, 将最优控制问题转化为非线性规划问题。在应用这种方法时, 先将整个轨道分为若干推力段和无推力段, 然后利用配置方法产生推力段的约束段, 利用状态转移矩阵来产生无推力段的约束。最后, 对共面轨道情况下的交会进行了数值仿真, 验证了方法的有效性和鲁棒性。

**关键词:** 交会; 最优控制; 非线性规划; 有限推力

**中图分类号:** V526      **文献标识码:** A

## Optimal Finite Thrust Rendezvous Using Nonlinear Programming

WANG Hua, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Spacecraft optimal rendezvous is studied using nonlinear programming method. A recently developed direct optimization technique is employed, which uses a piecewise polynomial representation for the state and controls, thus converting the optimal control problem into a nonlinear programming one. When using the method, the whole orbit is separated to thrust arcs and non-thrust arcs, then the collocation method is used to produce the constraints of thrust arcs, and state transition matrix is applied to producing the constraints of non-thrust arcs. At last, the simulation of coplanar rendezvous verifies the effectiveness and robustness of the method.

**Key words:** rendezvous; optimal control; nonlinear programming; finite-thrust

研究最优控制问题主要有两类方法: 间接法和直接法。间接法通常是利用 Pontryagin 原理来处理最优控制问题, 从而得到一个两点边值问题, 求解这一两点边值问题往往需要复杂的数值计算<sup>[1]</sup>; 直接法则是将原来的最优控制问题转化为一个参数最优问题, 然后利用数学规划来求解。

标准的直接法将整个最优控制过程分成若干个时间段, 每个时间段的端点称为节点。然后选择节点处的控制和(或)状态参数作为变量, 通过插值得到整个最优控制过程的控制和(或)状态参数, 根据这些参数积分状态方程形成约束条件, 从而得到一个数学规划问题<sup>[2]</sup>。Zondervan<sup>[3]</sup>等利用非线性规划研究了三次点火轨道转移问题。Enright 和 Conway<sup>[4]</sup>利用直接法研究了有限推力作用下的航天器轨道问题。本文采用直接法研究航天器的有限推力轨道交会, 将最优交会问题转化为一个大型非线性规划问题来解决。在转化过程中, 将有推力段和无推力段分别采用不同转化方法来研究, 并对有推力段采用基于 Hermite 插值的配置方法产生等式约束, 较好地解决了运算量和结果精度之间的矛盾。

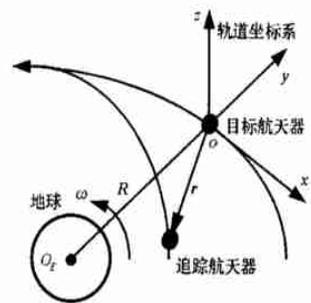


图 1 目标轨道坐标系

Fig. 1 Target orbit coordinate system

\* 收稿日期: 2003 - 01 - 07

作者简介: 王华(1977-), 男, 博士生。

# 1 航天器交会的数学模型

交会过程中有两个航天器,一个为追踪航天器,一个为目标航天器。定义目标轨道坐标系  $oxyz$  为:原点  $o$  在目标航天器质心,  $ox$  轴与轨道速度相反,  $oy$  轴背向地心,  $oz$  轴垂直于轨道平面并与其它两轴构成右手直角坐标系。

目标轨道为近圆轨道的两个相邻轨道航天器的相对运动,可由 Hill 方程(或称 C-W 方程)描述<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = au_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = au_y \\ \ddot{z} + \omega^2 z = au_z \end{cases} \quad (1)$$

这里,  $x, y, z$  分别是追踪航天器相对目标航天器的矢量在轨道坐标系三轴上的投影,  $\omega$  是目标航天器轨道角速度,  $a$  是追踪飞行器加速度的大小,对于有限推力航天器来说,它是一个常值,  $u_x, u_y$  和  $u_z$  表示追踪飞行器加速度的单位方向矢量值。

由方程(1)可得到下面的状态方程:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 3\omega^2 & 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}^T$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

由状态方程(2)得状态转移矩阵为

$$\Phi(t - t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 6(\tau - \sin\tau) & 0 & \frac{4\sin\tau - 3\tau}{\omega} & \frac{2(1 - \cos\tau)}{\omega} & 0 \\ 0 & 4 - 3\cos\tau & 0 & \frac{2(1 - \cos\tau)}{\omega} & \frac{\sin\tau}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tau & 0 & 0 & \frac{\sin\tau}{\omega} \\ 0 & 6\omega(1 - \cos\tau) & 0 & 4\cos\tau - 3 & 2\sin\tau & 0 \\ 0 & 3\omega\sin\tau & 0 & -2\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & -\omega\sin\tau & 0 & 0 & \cos\tau \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\tau = \omega(t - t_0)$$

已知航天器开始交会时的相对状态和交会结束时的相对状态,以及整个交会所需的总时间。现在的问题就是求解最优轨道,使得交会所需燃料最小,对于有限推力最优交会来说,就是求解总开机时间最少的优化轨道。

## 2 求解交会问题的非线性规划方法

### 2.1 设计变量

将整个交会轨道分为若干个推力段和无推力段,每个推力段再细分为若干个时间相等的小推力段(图2)。将每个节点的状态向

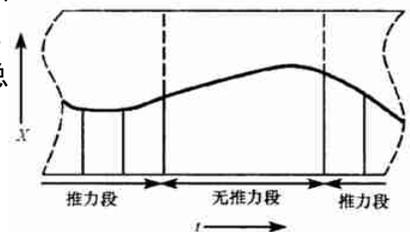


图2 问题结构

Fig. 2 Problem structure

量、控制向量、推力段与无推力段的时间跨度作为优化变量,得到下面的设计变量:

$$\mathbf{D} = \left[ \mathbf{X}_1^T, \mathbf{U}_1^T, \dots, \mathbf{X}_n^T, \mathbf{U}_n^T, T_1, \dots, T_{n-1} \right]^T \quad (4)$$

这里,  $n$  是总的节点数目,故  $(n-1)$  就是推力段和无推力段的数目总和。

## 2.2 推力段的约束

对于有推力段,可以用各种方法来产生约束,例如二阶中点法则、二阶梯形法则和四阶 Simpson 法则等<sup>[2]</sup>。Herman 和 Conway<sup>[6]</sup> 讨论了采用高阶隐式积分法则时轨迹优化问题的计算问题。这里采用基于 Hermite 插值的配置方法来产生等式约束。

假设在某一小的推力段中时间跨度为  $T_Y$ , 根据 Hermite 插值,此小段中点处的状态向量为

$$\mathbf{X}_Y = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_Y + \mathbf{X}_Y) + \frac{T_Y}{8}(\mathbf{X}_Y - \mathbf{X}_Y) \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{X}_Y$  和  $\mathbf{X}_Y$  是小推力段两端节点处的状态向量。

中点处的控制向量通过线性插值得到,为

$$\mathbf{U}_Y = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_Y + \mathbf{U}_Y) \quad (6)$$

同样根据 Hermite 插值得到中点处的状态向量对时间的导数

$$\mathbf{X}_{Yc} = -\frac{3}{2T_Y}(\mathbf{X}_Y - \mathbf{X}_Y) - \frac{1}{4}(\mathbf{X}_Y + \mathbf{X}_Y) \quad (7)$$

因此,误差向量取为

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{A}\mathbf{Y}_Y + \mathbf{B}\mathbf{U}_Y - \mathbf{X}_Y \quad (8)$$

## 2.3 无推力段的约束

对于无推力段约束的产生,通常需要采用复杂的积分计算,但是对于有限推力交会问题来说,两个终端状态之间具有简单的状态转移关系,这里我们利用这种关系来产生无推力段的等式约束。

假设某一无推力段的时间跨度为  $T_N$ , 由于在无推力情况下,航天器的状态转移可以通过状态转移矩阵来描述,所以取如下的误差向量:

$$\mathbf{C}_N = \Phi(T_N)\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_N \quad (9)$$

这里,  $\mathbf{X}_N$  和  $\mathbf{X}_N$  是无推力段两端节点处的状态向量。

## 2.4 非线性规划问题

由上面的分析得到了一个非线性规划问题,它的设计变量为  $\mathbf{D}$ , 即式(4)。目标函数为所有推力段的时间和,即

$$\min f(\mathbf{D}) = \sum_i T_i \quad (10)$$

这里的  $T_i$  表示推力段的时间跨度。

约束条件为

$$\mathbf{C} = \left[ \mathbf{C}_1^T, \mathbf{C}_2^T, \dots, \mathbf{C}_{n-1}^T, \mathbf{W}^T \right]^T \quad (11)$$

这里,  $\mathbf{C}_i^T$  表示推力段或无推力段的误差向量为零产生的约束,  $\mathbf{W}^T$  表示其它的约束。

其它约束包括等式约束和不等式约束两个方面。等式约束包括起点和终点所产生的约束,整个交会过程的时间和为常值产生的约束,每个节点的推力方向平方和为 1 所产生的约束。不等式约束包括每个推力段或非推力段的时间必须大于等于 0 所产生的约束。

由式(4)、式(10)和式(11)就构成了一个完整的大型非线性规划问题。求解此非线性规划问题,就可以得到整个交会过程中每个节点处的航天器状态向量和控制向量,从而得到了整个最优交会轨道。

## 2.5 非线性规划问题的求解

对于非线性规划问题而言,求解的思想是将其转化为无约束的参数极值问题。我们可以利用惩罚函数法来进行<sup>[7]</sup>。上面的非线性规划问题可以把目标函数修改为

$$\min F(\mathbf{D}) = f(\mathbf{D}) + m \cdot \mathbf{P}\mathbf{C}^T \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{P}$  是约束的权函数, 它是一个和约束  $\mathbf{C}$  维数相等的向量, 它反映了各个约束对原来指标函数影响的大小.  $m$  称为罚因子, 当  $m$  趋向于无穷大时, 函数  $F(\mathbf{D})$  的无条件极值问题的序列的极限点就是  $f(\mathbf{D})$  的条件极值点.

### 3 算例

讨论两个共面航天器二次点火情况下的有限推力最优交会问题. 此时, 状态方程(2) 就变成了一个二维问题. 取交会初始相对状态为  $X_0^T = (15000, -500, -100, 10)$ , 终端相对状态为  $X_E^T = (0, 0, 0, 0)$ , 整个交会过程的时间为 600s.

假定整个交会轨道由两个推力段和两个推力段之间的一个非推力段组成, 每个推力段被分成了 12 个小的推力区间, 这样, 全部交会轨道共有 26 个节点. 取两个推力段的时间和为目标函数. 设计变量共有 159 个 [26 个节点  $\times$  (4 个状态变量 + 2 个控制变量) + 3 个推力或无推力段的时间]. 推力段的约束共有  $(24 \times 4)$  个等式约束; 无推力段的约束有 4 个等式约束; 每个节点控制向量平方和为 1, 共有  $(26 \times 1)$  个等式约束; 由初始和终端条件产生  $(2 \times 4)$  个等式约束; 所有的时间和为常值产生 1 个等式约束; 所有推力段或非推力段的时间大于等于 0 产生了 3 个不等式约束. 这样, 得到一个具有 159 个设计变量、135 个等式约束和 3 个不等式约束的大型非线性规划问题.

利用上面的方法, 对这一有限推力最优交会问题进行了仿真计算. 计算中所有的初始值没有经过任何其它算法的处理, 都是直接根据所给出的初始条件和终端条件猜测得到. 图 3、图 4 分别表示相对位置和相对速度随时间的变化曲线, 图中的小圆圈表示我们在计算中取的节点.

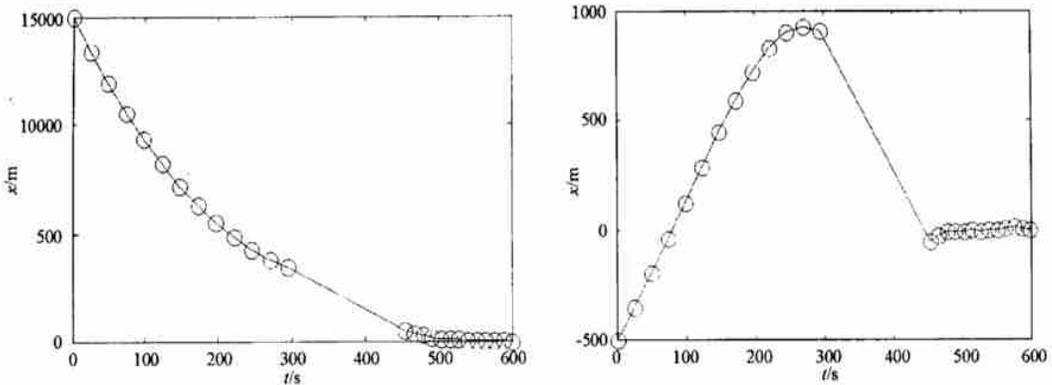


图 3 相对位置随时间的变化

Fig. 3 Relative position vs. time

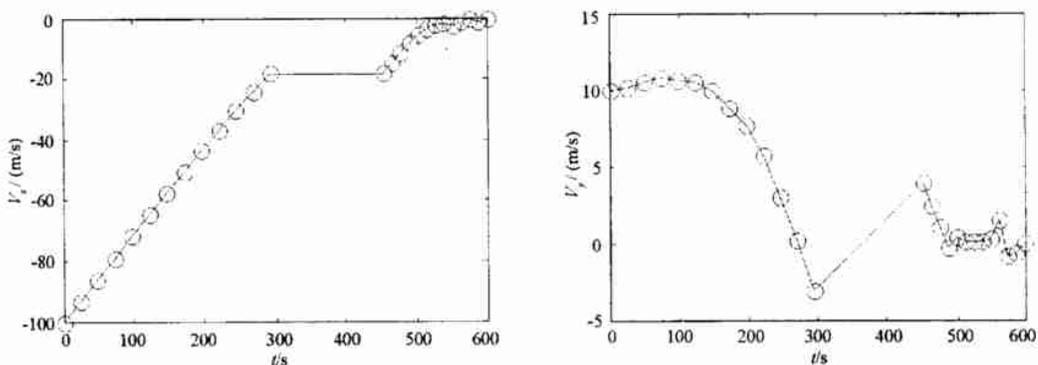


图 4 相对速度随时间的变化

Fig. 4 Relative velocity vs. time

从仿真曲线可以看出, 在交会过程中,  $x$  方向的位置和速度的总体趋势是不断减小的,  $y$  方向的位置

和速度随时间在零值上下波动, 而且越靠近交会的终端,  $y$  方向的速度波动越明显。这些现象和实际交会情况是相符合的。

## 4 结束语

直接法是解决最优控制问题的一种有效方法。它将控制轨迹分成若干段, 然后利用节点处的状态矢量和(或)控制矢量作为设计变量, 将状态方程转化为一系列的约束条件, 最终将最优控制问题变成一个非线性规划问题。直接法的一个显著优点在于它对计算初始条件具有很强的鲁棒性, 可以克服传统间接法对计算初始值要求严格的缺点。直接法的缺点在于当需要精确确定整个轨道的航天器状态和控制向量时, 就需要取更多的节点, 这时, 所转化成的非线性规划问题的维数随之增大。假如节点增加一倍, 那么非线性规划的维数就几乎变为原来的两倍, 随之所需要的计算量的增加是巨大的。本文利用直接法研究了航天器的有限推力最优交会问题, 将最优交会转化成了一个大型非线性规划问题。在转化过程中, 对于有推力段, 采用基于 Hermite 插值的配置方法产生等式约束; 对于无推力段, 利用了空间交会状态方程的状态转移矩阵来产生等式约束, 减少了利用数值方法的误差。对共面情况下的仿真验证了非线性规划法的有效性和鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] Bryson A E, Ho Y-C. Applied Optimal Control [M]. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [2] Hull D G. Conversion of Optimal Control Problems into Parameter Optimization Problems [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(1): 57- 60.
- [3] Zondervan K P, Wood L J, Caughey T K. Optimal Low-Thrust, Three Burn Orbit Transfers With Large Plane Changes [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1984, 32(3): 407- 427.
- [4] Enright P J, Conway B A. Optimal Finite-Thrust Spacecraft Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1991, 14(5): 981- 985.
- [5] 王华, 唐国金. 交会对接仿真系统的设计策略研究[J]. 系统仿真学报, 2002, 14(9): 1239- 1242.
- [6] Herman A L, Conway B A. Direct Optimization Using Collocation Based on High-Order Gauss-Lobatto Quadrature Rules [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1996, 19(3): 592- 599.
- [7] Fiaccio A V, McCormick C P. Nonlinear Programming - Sequential Unconstrained Minimization Technique [M]. J. Wiley, 1968.