文章编号: 1001 - 2486(2003) 05 - 0085 - 05

高维图像数据的最优表达*

谭　璐, 吴　翊, 刘　卓
(国防科技大学理学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要: 对于 $M \times N$ 维图像数据, 提出了一种用 M 维和 N 维向量表达的方式, 这种方式使得图像处理可以在较低维数的空间中进行, 便于计算。同时在一定意义下, 这种表达是最优的。证明了在图像采样点数趋于无穷时, 就相当于文献的结果。给出了这一方法的应用实例。

关键词: 高维图像数据; 最优表达

中图分类号: O29　　文献标识码: A

The Greatest Expression of High Dimensional Image

TAN Lu, WU Yi, LIU Zhuo
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A novel method is proposed by which a $M \times N$ dimensional image can be expressed with M and N dimensional vectors. Therefore, the image can be processed in the lower dimension space and it is easy to calculate. In certain sense this expression is optimum. We prove that it is identical to the result in the literature when the hits go to infinite. At last the applications verify the theoretical result.

Key words: high dimensional image; greatest expression

考虑作为二元函数的图像 $F(x, y)$, 设采样点 $M \times N$, 则一幅图像数据可视为 $M \times N$ 维向量。在图像处理中, 人们常用二元函数基去逼近 $F(x, y)$, 如 Fourier 基[1]、小波基[2] 等。通常这些函数基都具有可分离的形式。对应于采样数据, 即用 M 维和 N 维向量表达 $M \times N$ 维图像数据。但是这种事先取定固定基的办法在具体的图像处理中效果不一定好, 而且经常需要选取较多的项。本文提出的利用特征向量作为基的表达方法, 则因具体图像而异, 因此可以获得较好效果。事实上对于同样个数的基, 在均方误差准则下, 这种表达是最优的。并可证明, 在连续条件下, 当采样无限加细时这一结果收敛到相应连续的情形[1]。

1　模型

设 $F(x_i, y_j)$ 为 $F(x, y)$ 的采样点, $i = 1, 2, \cdots, M$, $j = 1, 2, \cdots, N$。则所讨论的方法归结为寻求 $f(x_i)$, $g(y_j)$, 使得

$$L(f, g) = \min\left\{\frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(F(x_i, y_j) - f(x_i)g(y_j)\right)^2\right\}$$

若令

$$F = (F(x_i, y_j))_{M\times N}, f = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_M)), g = (g(y_1), g(y_2), \cdots, g(y_N))$$

为方便记, 对 f, g 进行规范化(这里指 $\|f\| = \sqrt{M}$, $\|g\| = \sqrt{N}$), 仍记为 f, g, 则问题的模型为寻求规范化的 f, g 及 λ, 使得

$$L(f, g, \lambda) = \min\{\|F - \lambda f g^{\mathrm{T}}\|^2\} \tag{1}$$

---

* 收稿日期: 2003 - 04 - 25
基金项目: 国家 863 基金资助项目(2001AA35040); 国家自然科学基金资助项目(60003013)
作者简介: 谭璐(1977—), 男, 博士生。

其中, $\|F\|^2 = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}F(x_i, y_j)^2 \quad (F \in R^{M\times N})$。

称满足(1) 的 f, g, λ 为矩阵 F 的一步最优分解。λ 为一步最优分解系数, f, g 为一步最优分解因子。

2 求解

定理 1 为一步最优分解结果, 定理 2 为最终的分解结果。

定理 1 给定矩阵 $F_{M\times N}$, 则使得

$$L(f, g, \lambda) = \min\{\|F - \lambda fg^{\mathrm{T}}\|^2\}$$

的 λ, 规范化的 f, g 满足:

1) g 为 $F^{\mathrm{T}}F$ 的最大特征向量;

2) f 为 FF^{T} 的最大特征向量;

3) $MN\lambda^2$ 为 $F^{\mathrm{T}}F$(或 FF^{T}) 的最大特征值。

证明: 由于

$$\begin{aligned}\|F - \lambda fg^{\mathrm{T}}\|^2 &= \frac{1}{MN}[\mathrm{tr}(F^{\mathrm{T}}F) - 2\lambda f^{\mathrm{T}}Fg + MN\lambda^2] \\ &= \frac{1}{MN}\mathrm{tr}(F^{\mathrm{T}}F) + \left(\lambda - \frac{1}{MN}f^{\mathrm{T}}Fg\right)^2 - \left(\frac{1}{MN}f^{\mathrm{T}}Fg\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

故使得式(2) 最小等价于 $\lambda = \frac{1}{MN}\sup_{f,g}\{f^{\mathrm{T}}Fg\}$。故只需寻求使得 $\sup_{f,g}\{f^{\mathrm{T}}Fg\}$ 的 f, g 即可。

令 $Q(f, g) = f^{\mathrm{T}}Fg + l_1(f^{\mathrm{T}}f - M) + l_2(g^{\mathrm{T}}g - N)$, 则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial f} = Fg + 2l_1 f = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial g} = F^{T}f + 2l_2 g = 0\end{cases}$$

进一步得

$$F^{\mathrm{T}}Fg + 2l_1F^{\mathrm{T}}f = 0 \Rightarrow F^{\mathrm{T}}Fg = 4l_1l_2g$$

从而 g 为 $F^{\mathrm{T}}F$ 的特征值为 $4l_1l_2$ 的特征向量。同理 f 为 FF^{T} 的特征值为 $4l_1l_2$ 的特征向量。又由 $f^{\mathrm{T}}Fg = f^{\mathrm{T}}(-2l_1f) = -2Ml_1$, $f^{\mathrm{T}}Fg = (-2l_2g^{T})g = -2Nl_2$, 知 $l_2 = \frac{M}{N}l_1$, 故 $\lambda = \frac{1}{MN}\sup_{f,g}\{f^{\mathrm{T}}Fg\} = \frac{2}{N}\sup\{-l_1\}$。若记 $F^{\mathrm{T}}F$ 的最大特征值为 $T_{\max}$, 则 $T_{\max} = 4l_1l_2 = 4l_1^2\frac{M}{N} = MN\lambda^2$, 此时 g 为 $F^{\mathrm{T}}F$ 的最大特征向量, f 为 FF^{T} 的最大特征向量。

求得一步分解之后, 将 $F - \lambda fg^{\mathrm{T}}$ 视为新的图像数据, 重复前面的分解可得二步最优分解, 并且可一直进行下去。

定理 2 给定矩阵 $F_{M\times N}$, 则存在相应的最优分解 $\{\lambda_i\}$、$\{f_i\}$、$\{g_i\}$, 使得

$$F = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i g_i^{\mathrm{T}}$$

其中, $\{\lambda_i\}$ 为 i 步分解系数, $\{f_i\}\{g_i\}$ 为相应的 i 步分解因子 $(i = 1, 2, \cdots, k)$, $k = \mathrm{Rank}(F)$。则有下述结论成立:

1) $\{f_i\}$ 为 FF^{T} 的特征向量;

2) $\{g_i\}$ 为 $F^{\mathrm{T}}F$ 的特征向量;

3) $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ 单降, 且对 $\forall 1 \leqslant i \leqslant k \quad MN\lambda_i^2$ 为 $F^{\mathrm{T}}F$ 的非零特征值;

4) $\{f_ig_i^{\mathrm{T}}\}_1^k$ 之间为标准正交的, 且 $\langle F, f_ig_i^{\mathrm{T}}\rangle = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$;

5) 第 p 步近似误差 $L_p = \left\|F - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i g_i^{\mathrm{T}}\right\|^2 = \|F\|^2 - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \quad (p \leqslant k)$, 其中在 $R^{M\times N}$ 中定义:

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}B_{ij} \qquad \|A\|^2 = \langle A, A\rangle \qquad (\forall A, B \in R^{M\times N})$$

证明: 记一步最优分解为 λ_1, f_1, g_1, 则 $f_1^T f_1 = M$, $g_1^T g_1 = N$, $F^T F g_1 = MN\lambda_1^2 g_1$。

令 $F_1 = F - \lambda_1 f_1 g_1^T$, 则

$$F_1^T F_1 = (F^T - \lambda_1 g_1 f_1^T)(F - \lambda_1 f_1 g_1^T) = F^T F - N\lambda_1^2 g_1 g_1^T$$

显然, $F^T F$ 的特征向量(g_1 除外) 皆为 $F_1^T F_1$ 的特征向量(由不同特征向量的正交性可见) , 且对应的特征值也一样。故 $F_1^T F_1$ 的最大特征值、特征向量也为 $F^T F$ 的特征值、特征向量。进一步, 对任意的 $i = 1, 2, \cdots, k$, $F_i^T F_i$ 也有一致的结论。从而实际上 $F^T F$ 的所有特征值、特征向量就对应着全部的 λ 及 g。从而 2) 、3) 成立。同理可知 1) 成立。

由 1) 、2) 可知:

$$\langle f_i g_i^T, f_j g_j^T \rangle = \frac{1}{MN}(f_i^T (f_j g_j^T) g_i) = \frac{1}{MN}(f_i^T f_j)(g_j^T g_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

故 $\{f_i g_i^T\}_1^k$ 之间为标准正交的。

又 $\langle F, f_i g_i^T \rangle = \frac{1}{N^2} f_i^T F g_i = \frac{1}{N^2} f_i^T N\lambda_i f_i = \lambda_i$, 故 $\langle F, f_i g_i^T \rangle = \lambda_i \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$ 。

因此 4) 成立。由 4) 推知 5) 成立。

3　分划无限加细时与连续情形的一致性

定理 3 说明, 当分割无限加细时, 采样矩阵的分解对应于文献[1] 的分解。这一点不是明显的, 即采样矩阵的分解结果并不明显对应于连续分解的采样。这是由于实际计算过程中, 我们对分解结果施加了正交的限制, 从而只有当连续分解结果的采样向量之间是正交时, 这里的结果与连续结果之间才有这种自然的联系。接下来的定理是文献[1] 中的连续结果。之后我们以具有两个分解因子的函数为例来证明本文结果与连续结果的一致性。由证明过程可以看出, 这一证明可以无困难扩展到对任意有限分解因子的情形。

定理 3[1]　$F(x, y)$ 为定义于 2 维空间 R^2 中单位矩形 Ω($\Omega = \{0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$) 上平方可积函数, 则使得 $L = \int_\Omega (F(x, y) - \lambda\varphi(x)\Psi(y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \min$ 的 λ、φ、Ψ 为如下算子方程的解:

$$\phi \cdot \Psi = \int_0^1 F(x, y)\Psi(y)\mathrm{d}y = \lambda \cdot \varphi, \quad \phi \cdot \varphi = \int_0^1 F(x, y)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \Psi$$

其中, λ 为自伴算子 ϕ 的最大本征值, φ、Ψ 为相应的自伴算子 ϕ 的本征元。

对 $F(x, y) - \lambda\varphi(x)\Psi(y)$ 使用上述定理又可得相应的 λ、φ、Ψ, 继续这一过程可得 $F(x, y)$ 的最优分解。定理 4 证明了分划无限加细时与连续情形的一致性(具体证明见附录) 。

定理 4　若 $F(x, y) \in C_2(\Omega)$, $F(x, y) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i f_i(x) g_i(y)$ 为其相应的分解式, 条件同引理 1, $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, $0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$ 为区间[0, 1] 的两个等距划分, 又 $F = \lambda_1^n f_1^n g_1^{nT} + \lambda_2^n f_2^n g_2^{nT}$, 则下列结论成立:

1) $\lim_{n \to \infty} \lambda_i^n = \lambda_i \qquad (i = 1, 2)$

2) 适当地选择 f_i^n, g_i^n 的符号, 有 $\lim_{n \to \infty} f_i^n = f_i$, $\lim_{n \to \infty} g_i^n = g_i \qquad (i = 1, 2)$

4　实例

通过例1 说明最优分解将二元插值问题转化为一元插值问题的可行性。通过例2 说明最优分解将二元去噪问题转化为一元去噪问题的可行性。

例 1　(图像插值) 取图像大小为 372 × 372, 对其间隔采样, 然后再插值。使用最优表达取 $k = 186$, 对分解因子使用 3 次样条函数[5] 来进行插值。通过图 1 可以看出此法的结果要优于双线性插值的结果。

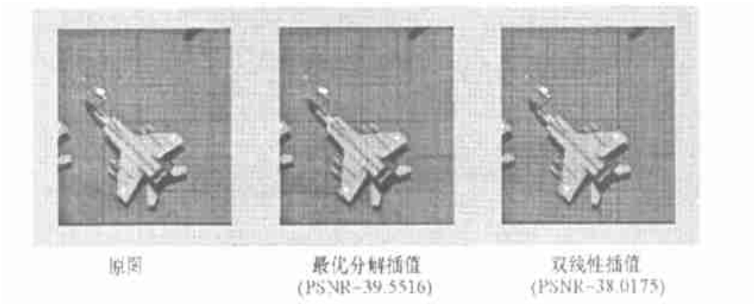

图 1　最优分解插值
Fig. 1　Interpolation with the greatest expression

例 **2**　(图像去噪) 这里我们使用最优表达取 $k = 186$, 对分解因子进行小波去噪(简单的去掉其高频成分)。通过图 2 可以看出, 使用最优分解方法去噪可以取得一定的效果。此外这种方法使得我们考虑的数据维数从 $M \times N$ 维降为 M 维和 N 维, 方便了处理。

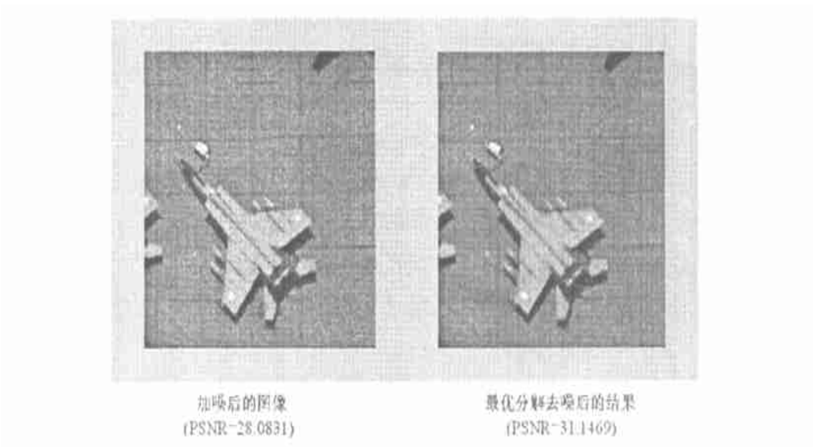

图 2　最优分解去噪
Fig. 2　Denoising with the greatest expression

通过实例可以看出, 寻求图像在 L_2 范数意义下的近似最优表达, 将对 $M \times N$ 维图像数据的处理, 转化为 M 维和 N 维向量的处理, 在实际中是可行的。由于最优分解充分考虑了图像本身的特性, 从而可能会有更好的结果。

参 考 文 献:

[1]　宋健. 高维函数和流形在低维可视空间的最优表达[J]. 科学通报, 2001, 6.
[2]　Bracewell R N. The Fourier Transform and its Applications[J]. McGraw - Hill, New York, 1986.
[3]　Ingrid Daubechies. Ten Lectures On Wavelets[M]. The Society for Industrial and Applies Mathematics, 1992.
[4]　Castleman K R. Digital Image Processing[M]. Prentice - Hall, 1996.
[5]　李岳生. 样条与插值[M]. 上海科学技术出版社, 1983.

附录:

引理 **1**　若 $F(x, y) \in C_2(\Omega)$, $F(x, y) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i f_i(x) g_i(y)$ 为其相应的分解式。其中 $\lambda_1 > \lambda_2$, 并且 $f_i(x)$, $g_i(y)$ 满足规范化条件:

$$\|f_i(x)\|_2 = \|g_i(y)\|_2 = 1 \quad \langle f_1(x), f_2(x)\rangle = \langle g_1(y), g_2(y)\rangle = 0 \quad i = 1, 2$$

若 $0 = x_1 < x_2 < \cdots x_n = 1$, $0 = y_1 < y_2 < \cdots y_n = 1$ 为区间[0, 1] 的两个等距划分, 则有下列结论成立:

1) $F^{T} F$ 的特征向量具有形式 $g^n = l_1^n g_1(n) + l_2^n g_2(n)$;

其中, $g_i(n)$ 代表 $g_i(y)$ 的容量为 n 的采样向量。

2) 若 $g^{nT}g^n = n$, 则$\{l_1^n\}$, $\{l_2^n\}$ 皆为有界序列。

3) 对 FF^T 也有一致的结论。

证明: 记　$b_{ij}^n = g_i^T(n)g_j(n)$, $a_{ij}^n = f_i^T(n)f_j(n)$　$i,j = 1,2$

由于连续函数的本征函数是连续的, 故$f_i(x)$, $g_i(y) \in C_2([0,1])$ $i = 1,2$。此外由已知易见:

$$F^TF = \lambda_1^2 a_{11}^n g_1(n)g_1^T(n) + \lambda_1\lambda_2 a_{12}^n(g_1(n)g_2^T(n) + g_2(n)g_1^T(n)) + \lambda_2^2 a_{22}^n g_2(n)g_2^T(n)$$

由定理2 知最优分解因子为 F^TF 的特征向量, 故有:

$$g^n = l_1^n g_1(n) + l_2^n g_2(n) \tag{3}$$

由 $g^{nT}g^n = n$ 得:

$$\frac{(l_1^n)^2 g_1^T(n)g_1(n)}{n} + \frac{2l_1^n l_2^n g_1^T(n)g_2(n)}{n} + \frac{(l_2^n)^2 g_2^T(n)g_2(n)}{n} = 1 \tag{4}$$

若有一无界, 不妨设为$\{l_1^n\}$。则由规范化条件得:

$$\exists\, n_k,\ s.t\ \frac{g_1^T(n_k)g_1(n_k)}{n_k} \geqslant \frac{1}{2} \quad \frac{g_2^T(n_k)g_2(n_k)}{n_k} \geqslant \frac{1}{2} \quad \left|\frac{g_1^T(n_k)g_2(n_k)}{n_k}\right| \leqslant \frac{1}{4}$$

则(4) 式右边 $\geqslant \frac{1}{2}\left({l_1^{n_k}}^2 - |l_1^{n_k}||l_2^{n_k}| + {l_2^{n_k}}^2\right) \geqslant \left({l_1^{n_k}}^2 + {l_2^{n_k}}^2\right)/4 \to +\infty$, 矛盾。

故2) 成立。同理可知 3) 成立。

引理 2　条件同引理 1, 若 g^n 为F^TF 的最大特征向量, 则有 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{l_2^n}{l_1^n}\right| < +\infty$; 若 g^n 为F^TF 的次大特征向量, 则有 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{l_1^n}{l_2^n}\right| < +\infty$。

证明: 记 $b_{ij}^n = g_i^T(n)g_j(n)$, $a_{ij}^n = f_i^T(n)f_j(n)$, $i,j = 1,2$。
其中, $g_i(n)$ 代表 $g_i(y)$ 的容量为 n 的采样向量,$f_i(n)$ 代表$f_i(x)$ 的容量为 n 的采样向量。

再记 l_{ij}^n 表示采样为n 时, 采样矩阵的第 i 个分解因子对应的第j 个连续分解因子采样向量的系数。

反证: 若不然, 由引理 1 知 l_{11}^n, l_{12}^n 皆有界, 故 $\exists\, n_k$　$s.t$ $|l_{11}^{n_k}| \to 0$　$|l_{12}^{n_k}| \to 1$。进一步由 $F^TFg_1^n = \lambda_1^n g_1^n$ 可知: $\lambda_1^{n_k} \to \lambda_2$。

再由正交性知:　$l_{11}^n l_{21}^n b_{11}^n + l_{12}^n l_{21}^n b_{12}^n + l_{11}^n l_{22}^n b_{21}^n + l_{12}^n l_{22}^n b_{22}^n = 0$

故$\lim_{n\to\infty} l_{22}^n = 0$。由(4) 式可以看出$\lim_{n\to\infty}|l_{21}^n| = 1$, 同样由 $F^TFg_2^n = \lambda_2^n g_2^n$ 可知 $\lambda_2^{n_k} \to \lambda_1$。

从而 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, 与已知 $\lambda_1 > \lambda_2$ 矛盾。

故结论成立。

定理 4 的证明: 记 $b_{ij}^n = g_i^T(n)g_j(n)$, $a_{ij}^n = f_i^T(n)f_j(n)$　$i,j = 1,2$, 简记$g_i = g_i(n)$, $f_i = f_i(n)$。
由引理1 可知:

$$\begin{aligned}(F^TF)(l_1^n g + l_2^n g_2) &= [\lambda_1^2 a_{11}^n(l_1^n b_{11}^n + l_2^n b_{12}^n) + \lambda_1\lambda_2 a_{12}^n(l_1^n b_{12}^n + l_2^n b_{22}^n)]g_1 \\ &\quad + [\lambda_2^2 a_{22}^n(l_1^n b_{12}^n + l_2^n b_{22}^n) + \lambda_1\lambda_2 a_{12}^n(l_1^n b_{11}^n + l_2^n b_{21}^n)]g_2 \\ &= n^2\lambda^{2n}(l_1^n g_1 + l_2^n g_2)\end{aligned} \tag{5}$$

若 g^n 为最大特征向量, 将(5) 式两侧左乘以 g_1^T 后令 $n \to +\infty$可知:

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_1^2 - \lambda_1^{2n})l_1^n = 0$$

结合引理2 知: $\lim_{n\to+\infty}\lambda_1^{2n} = \lambda_1^2$, 即$\lim_{n\to+\infty}\lambda_1^n = \lambda_1$。同理将(5) 式两侧左乘以 g_2^T 后令 $n \to +\infty$ 可知:
$\lim_{n\to+\infty}(\lambda_2^2 - \lambda_1^{2n})l_2^n = 0$, 从而 $\lim_{n\to+\infty} l_2^n = 0$, 进一步可知 $\lim_{n\to+\infty} l_{21}^n = 1$。

故适当地选择 g_1^n 的符号, 有 $\lim_{n\to+\infty} g_1^n = g_1$。同理可知在相同意义下有 $\lim_{n\to+\infty} f_1^n = f_1$。

若 g^n 为次大特征向量, 同理可知结论成立。