文章编号:1001 - 2486(2003)05 - 0094 - 04

倒向随机微分方程在欧式期权中的应用*

史正伟,傅一歌
(国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073)

摘　要:假设市场为无套利市场,而且市场上只有两种证券:一种是无风险债券;一种是有风险的股票。通过自筹资策略,得到期权价格所满足的倒向随机微分方程(BSDE),利用倒向随机微分方程给出欧式期权价格概率表示;并证明欧式期权的完全套期保值性。

关键词:自筹资策略;欧式期权;倒向随机微分方程;Gisanov 定理

中图分类号:O211.63;O29　**文献标识码**:A

The Application of Backward Stochastic Differential Equations to European Option

SHI Zheng-wei, FU Yi-ge
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Assuming that there is no arbitrage and there are two securities traded, riskless and risky in the market, by self-financing strategy we obtain the BSDE option price satisfies , and then we will get the probability expression formula of the European options' price by BSDE. We will give the proof of the complete hedging of the European option.

Key words: self-financing strategy; option pricing; BSDE; Gisanov theorem

近年来,在金融领域,衍生证券变得越来越重要,主要因为金融衍生资产可以作为保值和减小风险的工具,又可以被当做高风险和高收益的机会,期权赋予其购买者在预先约定的时间以预先约定的价格买入或卖出某项基础资产的权利,为获得这种权利则必须支付给期权出售者费用,反映出期权的买卖双方对某一权力做出的价值判断,但期权的价格很难从市场中直接反映,因此期权定价一直都是金融数学中的一个重要课题,在金融衍生市场中进行交易的期权大部分是标准期权,即欧式期权和美式期权。所以对标准期权的定价就显得尤为重要。

在金融经济学中期权的定价及其套期保值策略的构造具有重要的地位,对于定价已有很多研究结果[1]。传统的期权定价理论一般以随机分析中的鞅表示定理和 Gisanov 定理作为研究工具,而近年来随着倒向随机微分方程的理论迅速发展,彭实戈通过倒向随机微分方程获得了非线性 Feynman-Kac 公式[2],嵇少林,陈增敬等对倒向随机微分方程作了广泛的研究。

1　证券,期权价格模型

考虑连续市场情形,设$(\Omega, F_{t\geq 0}, F, P)$为概率空间$(\Omega, F, P)$带了一 σ 代数流的概率空间,其中 $F_t = \sigma(w(s), s\leq t)$,即由标准布朗运动$\{w(s)\}_{s\geq 0}$产生 σ 的代数流,考虑只有两种可交易资产的市场模型:一种债券,一种股票。价格过程分别为 B_t, S_t。并满足

$$dB_t = B_t r(t)dt$$

$$dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dw_t$$

$r(t)\geq 0$为债券瞬时利率,$\mu(t)$表示股票的瞬时期望率,$\sigma(t)$表示股票的瞬时波动率,假设:(1)

* 收稿日期:2003 - 02 - 28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60003013)
作者简介:史正伟(1979—),男,硕士生。

$r(t),\mu(t),\sigma(t)$ 都是有界的确定性函数情形且 $\sigma^{-1}(t)$ 有界,$t\in[0,T]$;(2) 投资者为小投资者,即它的投资行为不影响证券的市场价格。

设小投资者在 t 时刻时的资本为 V_t,将 V_t 分成两部分:$\pi(t),V_t-\pi(t)$。将 $\pi(t)$ 投资于股票,$V_t-\pi(t)$ 投资于债券,由于小投资者在 t 时刻作出的决策只依赖于当前获得的信息 F_t,所以 $\pi(t)$ 是可料过程,假定 $\pi(t)\in M(0,T)=\{X_t\mid X_t$ 取值于 R^1、F_t 适应的随机过程,$E\int_0^T(X_t)^2\mathrm{d}t<\infty\}$,则自筹资资产方程满足线性随机微分方程:

$$\mathrm{d}V_t=(r(t)V(t)+(\mu(t)-r(t))\pi(t))\mathrm{d}t+\sigma(t)\pi(t)\mathrm{d}w_t$$

根据无套利定价理论,对于欧式看涨期权的未定权益 $f_T=(S_T-k)^+$,期权在 t 时刻的价格为下面倒向随机微分方程的解在 t 时刻的值 V_t:

$$\begin{cases}\mathrm{d}V_t=(r(t)V_t+(\mu(t)-r(t))\pi(t)\mathrm{d}t)+\sigma(t)\pi(t)\mathrm{d}w_t\\ V_T=(S(T)-k)^+\end{cases}\tag{1}$$

2 欧式看涨期权定价公式的推导

2.1 传统的欧式看涨期权定价

在此不详细证明,只给出证明的步骤;对于未定权益 $f_T=(S_T-k)^+$ 的定价,关键有三个步骤:

(1) 找到等价鞅测度,也即使得股票的折现价格 $\tilde{S}_t$ 为鞅;(2) 取折现权益在等价鞅测度下的条件期望过程:$X_t^*(\mu,\omega)=E^*\left(\frac{f_T(\omega)}{B_T(\omega)}\middle|F_t^{w^*}\right),0\leqslant t\leqslant T$;(3) 寻找可料过程 θ_t^1,使得 $\mathrm{d}X_t^*=\theta_t^1\mathrm{d}\bar{S}_t$,从而求得自筹资策略 $\theta=(\theta_t^0,\theta_t^1)$,使得相应的资本过程 $\bar{V}^\theta=X^*$,于是折现资本过程:$V_t^\theta(\mu,\omega)=E^*(\mathrm{e}^{-r(T-t)}f_T(\omega)\mid F_t^{w^*})$。

2.2 用倒向随机微分方程证明欧式看涨期权的完全套期保值性及确定价格的概率表示

定义 如果存在股票与证券的投资组合策略能够复制出一种期权,就称该期权可以完全套期保值,在只有两种证券的市场上,完全套期保值反映在倒向随机微分方程中就与解的存在唯一性有关[3]。

对于倒向随机微分方程:

$$\begin{cases}-\mathrm{d}Y_t=g(Y_t,Z_t,t)\mathrm{d}t-Z_t\mathrm{d}w_t\\ Y_T=\xi\end{cases}$$

这里 ξ 是一个给定的 F_T 可测的随机变量,$g:R^1\times R^1\times[0,T]\to R^1$ 的 F_t 适应过程,由文献[4]知,若

(1) $\int_0^T|g(*,0,0)|\mathrm{d}s\in L^2(\mathbf{\Omega},F_T,\mathbf{P},R^1)$

(2) g 关于(y,z) 满足 Lipschitz 条件:$\forall y,y^*,z,z^*\in R,\exists C>0$,使得

$$|g(t,y,z)-g(t,y^*,z^*)|\leqslant C(|y-y^*|+|z-z^*|)$$

(3) $\xi\in L^2(\mathbf{\Omega},F_T,\mathbf{P},R^1)$

则存在唯一的 F_t 适应过程$(y,z)\in M(0,T,R^1\times R^1)$。

定理 1 欧式看涨期权可以完全套期保值。

证明: 令 $z(t)=\sigma(t)\pi(t)$,则方程(1) 变为

$$\begin{cases}-\mathrm{d}V_t=(-r(t)V_t-(-\mu(t)-r(t))\sigma^{-1}(t)z(t))\mathrm{d}t-z(t)\mathrm{d}w_t\\ V_T=(S(T)-k)^+\end{cases}\tag{2}$$

因为

1) $\int_0^T|0|\mathrm{d}s\in L^2(\Omega,F_T,P,R)$

2) $|g(t,y,z)-g(t,y^*,z^*)|=|r(t)(y-y^*)+(\mu(t)-r(t))\sigma^{-1}(t)(z-z^*)|$

$$\leqslant M(|y-y^*|+|z-z^*|)$$

其中，$M \geqslant \max\{r(t), |\mu(t)-r(t)|\sigma^{-1}(t)\}$。

3) $V_T \in L^2$

所以该方程有惟一解，因此，欧式看涨期权可以被股票与证券的投资组合完全复制。

定理2 欧式看涨期权在 t 时刻的价格 V_t 可以表示为变量 $S(t)$，t 的确定性函数 $C(S(t),t)$，并且 $C(S(t),t)$ 是下面偏微分方程的解：

$$\begin{cases} C_t + 1/2 C_{xx}\sigma^2(t)x^2 + r(t)C_x x - r(t)C = 0 \\ C(x,T) = (x-k)^+ \end{cases} \tag{3}$$

其中，$C(S(t),t) \in C^{2,1}(R,[0,T])$。

证明：对函数 $C(S(t),t)$，运用 Itô 公式及方程(3)得：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C(S(t),t) &= [C_t + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2(t)S^2(t) + \mu(t)C_x S(t)]\mathrm{d}t + C_x\sigma(t)S(t)\mathrm{d}w_t \\ &= [r(t)C + (\mu(t)-r(t))C_x S(t)\mathrm{d}t + C_x S(t)\sigma(t)\mathrm{d}w_t] \end{aligned}$$

记 $C_X\sigma(t)S(t) = z(t)$，得到

$$\mathrm{d}C(S(t),t) = [r(t)C + (\mu(t)-r(t))\sigma^{-1}(t)z(t)]\mathrm{d}t + z(t)\mathrm{d}w_t$$

与(2)式比较，由倒向随机微分方程解的惟一性可得：

$$V_t = C(S(t),t)$$

为了得到(3)式的解的形式，引入概率测度 P^*，令

$$\frac{\mathrm{d}P^*}{\mathrm{d}P} = \exp\left\{-\int_0^T[\sigma^{-1}(t)(\mu(t)-r(t))]\mathrm{d}w_t - \frac{1}{2}\int_0^T[\sigma^{-1}(t)(\mu(t)-r(t))]^2\mathrm{d}t\right\}$$

则 P^* 为 P 的等价概率测度。由 Gisanov 定理知随机过程

$$w_t^* = w_t + \int_0^T[\sigma^{-1}(t)(\mu(t)-r(t))]\mathrm{d}t$$

为概率空间$(\mathbf{\Omega}, F_t, \mathbf{P}^*)$上的标准布朗运动。由定理2知，要得到 t 时刻期权的价格，只要求得(3)式的解即可。

定理3 方程(3)有解：$C(S(t),t) = E_{P^*}[(S(T)-k)^+\exp[-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s] \mid F_t]$

证明：对函数 $C(S(h),h)\exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]$ 运用 Itô 公式得：

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}C(S(h),h)\exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s] \\ &= \exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s][C_h + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2(h)S^2(h) + \mu(h)C_x S(h) - r(h)C]\mathrm{d}h \\ &\quad + \exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]C_x\sigma(h)S(h)\mathrm{d}w_h \\ &= \exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s][C_h + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2(h)S^2(h) + r(h)C_x S(h) - r(h)C]\mathrm{d}h \\ &\quad + \exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]C_x\sigma(h)S(h)\mathrm{d}w_h^* \end{aligned}$$

由方程(3)知，$\mathrm{d}C(S(h),h)\exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s] = \exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]C_x\sigma(h)S(h)\}\mathrm{d}w_h^*$，则

$$C(S(T),T)\exp[-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s - C(S(t),t)] = \int_t^T\{\exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]C_x\sigma(h)S(h)\}\mathrm{d}w_h^*$$

由本文所给的条件知，$E\int_t^T[\exp[-\int_t^h r(s)\mathrm{d}s]C_x\sigma(h)S(h)]^2\mathrm{d}h < \infty$，所以 $I_s = \int_t^S\{\exp[-\int_t^h r(k)\mathrm{d}k]C_x\sigma(h)S(h)\mathrm{d}w_h^*\}$ 为 P^* 鞅。两边取 $E_{P^*}[* \mid F_t]$，得到 $E_{P^*}[I_S \mid F_t] = I_t = 0$，因此方程(3)

的解为:

$$C(S(t),t) = E_{p^*}[(S(T)-k)^+ \exp[-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s] \mid F_t] \tag{4}$$

注:当 $\mu(t)=\mu,\sigma(t)=\sigma,r(t)=r$ 时,通过解微分方程(3)或用概率论方法直接由(4)得出期权价格的显示解就是著名的 Black-Scholes 公式。

3 结 论

倒向随机微分方程在金融市场上具有很重要的价值,文中所解决的问题为期权定价提供了理论依据,也说明金融市场上的一些问题可以转化为解决倒向随机微分方程的问题。

参 考 文 献:

[1] Wilmott P, Dewynne J, Howisons. Option Pricing: Mathematical Models and Computation[J]. United Kingdom, Oxford financial Press, 1993.

[2] Karoui N E, Peng S, Quenez M C. Backward Stochastic Differential Equations in Finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 1 - 71.

[3] 彭实戈. 倒向随机微分方程及其应用[J], 数学进展, 1997, 26(2).

[4] 严加安, 彭实戈, 等. 随机分析选讲[M]. 北京:科学出版社, 1997.

(上接第 79 页)

5 结束语

讨论了基于软件无线电技术,对直接序列扩频的码元起始点进行捕获与跟踪的几种快速算法。方案对中频采样信号的处理全部用软件算法实现,适用于信噪比较低、对设备体积及功耗有严格限制的通信系统中。本方案在某通信系统中已得到应用,系统运行结果符合技术要求。

参 考 文 献:

[1] 雷鸣, 查光明. 一种扩频 PN 码的混合同步系统[J]. 电子科技大学学报, 1996, 25(9): 358 - 361.

[2] El-Tarhuni M G, Sheikh A U H. Performance analysis for an adaptive filter code-tracking technique in direct-sequence spread-spectrum systems[J]. IEEE Trans. Commu, Aug. 1998, 46(8): 1058 - 1064.

[3] 张蔚, 张宗橙. 直接序列扩频捕获的门限调整技术与混合方案[J]. 江苏通信技术, 2000, 16 (2): 5 - 9.

[4] Salih M, Tantaratana S. A closed-loop coherent acquisition scheme for PN sequences using an auxiliary sequence[J]. IEEE J. Select. Areas Commu., Oct. 1996, 14(10): 1653 - 1659.

[5] Salih M, Tantaratana S. A closed-loop coherent PN acquisition system with a pre-loop estimator[J]. IEEE Trans. Commu, Sep. 1999, 47(9): 1394 - 1405.

[6] Kang S, Lee Y H. Rapid acquisition of PN signals for DS/SS systems using a phase estimator[J]. IEEE J. Select. Areas Commu., Jun. 2001, 19(6): 1128 - 1137.

[7] Corazza G E. On the MAX/TC criterion for code acquisition and its application to DS-SSMA systems[J]. IEEE Trans. Commu, Sep. 1996, 44(9): 1173 - 1182.