文章编号: 1001－2486(2003)06－0067－05

高维无穷时滞NFDE概周期解的存在性和稳定性*

刘易成, 李志祥
(国防科技大学理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 讨论高维的中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\int_{-\infty}^{0}q(s)x(t+s)\mathrm{d}s\right]=A(t,x)x(t)+f(t,x_t)$$

的概周期解问题。利用 C_h 空间, 矩阵测度和Krasnoselski不动点定理获得了其概周期解的存在性与惟一性定理。特别地, 当 $q=0$ 时给出了存在惟一且一致稳定概周期解的条件, 推广了文献[1～5]的结果。

关键词: 中立型泛函微分方程; 概周期解; 矩阵测度; 稳定性
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

The Existence and Stability of the Almost Periodic Solutions of the Higher Dimensional NFDE with Infinite Delay

LIU Yi-cheng, LI Zhi-xiang
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The authors investigate the almost periodic solution of neutral functional equation with infinite delay of the following

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\int_{-\infty}^{0}q(s)x(t+s)\mathrm{d}s\right]=A(t,x)x(t)+f(t,x_t)$$

Some results on the existence and uniqueness of almost periodic solutions are obtained by use of C_h space, matrix measure and Krasnoselskii's fixed theorem. Especially, when $q(s)$ is zero matrix, we derive sufficient conditions for the existence of a unique and uniformly stable almost periodic solution, which generalizes several results in references [1～5].

Key words: neutral functional differential equation; almost periodic solution; matrix measure; stability

1 引 理

近年来, 对无穷时滞NFDE的周期解和概周期解的研究引起了人们极大的关注, 尤其是对无穷时滞Volterra型积分微分方程的周期解存在性有比较详细的结果[1～4,7], 而对概周期解存在性的研究更备受关注。本文在文献[1～5]的基础上考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)-\int_{-\infty}^{0}q(s)x(t+s)\mathrm{d}s\right]=A(t,x)x(t)+f(t,x_t)\tag{1}$$

的概周期解的存在性和稳定性, 利用矩阵测度和不动点方法得到了它存在概周期解的几个充分条件, 推广了文献[1～5]的相应结果。

设 $f(t)$ 是概周期函数(Almost periodic function), 以下记 $\boldsymbol{R}$ 上所有概周期函数的全体为 AP。$f(t)$ 的平均值定义为 $M(f)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$。如果 $f\in AP$, 则 f 的平均值一定存在[7]; 当 f 为周期函数时, $M(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$。记 $\bar{f}=\sup\limits_{t\in R}|f(t)|$, $\underline{f}=\inf\limits_{t\in R}|f(t)|$。序列 $\{\alpha_n\}$ 简记为 α, $T_\alpha f=\lim\limits_{n\to+\infty}f(t+$

---

* 收稿日期: 2003－04－04
基金项目: 校预研基金资助项目
作者简介: 刘易成(1977—), 男, 硕士生。

$\alpha_n)$, $\mathrm{mod}(f)=\{\mu:\ \mu=\sum_{j=1}^{N}n_j\lambda_j,\ \lambda_j\in\Lambda_f\}$[6,8]，其中，$\lambda_j$、$N$ 是整数，Λ_f 表示f 的指数集。在 R^n 和$R^{n\times n}$ 中定义范数：$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$\|A\|=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$R^{n\times n}$ 中的矩阵测度定义为[2]：$\mu(A)=\lambda_{\max}\left[\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})\right]$，$\lambda_{\max}[A]$ 表示矩阵A 的最大特征值。易见，当$A\in AP$时，有$\mu(A)\in AP$。记$R^-=(-\infty,0]$，$BC=\{\varphi|\ \varphi\in C(R^-,R^n),\ |\varphi(s)|$ 有界，$s\in R^-\}$。设 $h\in C(R^-,R)$，$h(s)>0$ 且 $l=\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s<+\infty$。可设$l=1$（否则有$1=l^{-1}\int_{-\infty}^{0}h(s)\mathrm{d}s$），对$\varphi\in BC$，定义$|\varphi|_h=\int_{-\infty}^{0}h(s)|\varphi|^{[s,0]}\mathrm{d}s$，其中$|\varphi|^{[s,0]}=\max_{s\leqslant\theta\leqslant0}|\varphi(\theta)|$，则$|\cdot|_h$ 是BC 的范数。记$(BC,|\cdot|_h)$ 为BC_h，则BC_h 是Banach 空间[1]。记$C=\{u|\ u\in C(R,R^n),\ u\in AP\}$，对$u\in C$，$\|u\|=\sup_{t\in R}|u(t)|$；记$C_1=\{u|\ u\in C^1(R,R^n),\ u'\in AP,\ u\in AP\}$，对 $u\in C_1$，$\|u\|_1=\|u\|+\|u'\|$，则 C，C_1 均为Banach 空间。

考虑方程

$$x'(t)=A(t)x(t)\tag{2}$$

$$x'(t)=A(t)x(t)+g(t)\tag{3}$$

其中，$x\in R^n$，$A(t)$ 为 $n\times n$ 函数矩阵，$A,g\in AP$。

引理1[4] 设 $X(t,t_0)$ 是式(2) 满足 $X(t_0,t_0)=I$ 的基本矩阵，则有

$$X(t,\tau)X(\tau,s)=X(t,s),\quad \forall t,s,\tau\in R$$

并且

$$\exp\left\{\int_s^t-\mu[-A(r)]\mathrm{d}r\right\}\leqslant\|X(t,s)\|\leqslant\exp\left\{\int_s^t\mu[A(r)]\mathrm{d}r\right\}$$

引理2 考虑微分方程(3)，如果$\mu[A(t)]\leqslant a(t)$，其中$a(t)$ 是AP 函数且$M(a)<0$，则式(3) 有惟一的概周期解 $x(t)$，并且

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t.s)g(s)\mathrm{d}s,\quad \mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$$

证明：设 $\varphi(t)$ 是式(2) 的任意概周期解。由引理1及$M(a)<0$知 $\varphi(t)\equiv0$，$t\in R$，即式(2) 有惟一的概周期解 $\varphi(t)\equiv0$，$t\in R$。而$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t.s)g(s)\mathrm{d}s$ 是式(3) 的一个解，并且

$$|x(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|X(t,s)g\|\mathrm{d}s\leqslant g\int_{-\infty}^{t}\|X(t,s)\|\mathrm{d}s\leqslant g\int_{-\infty}^{t}\exp\left[\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s$$

因此$x(t)$ 是式(3) 的惟一有界解，并且式(3) 的任何壳方程都仅有惟一有界解[6,8]。因为$A(t)$，$g(t)$ 是概周期函数，故对任意序列 α'，β'，存在公共子序列 $\alpha\subset\alpha'$，$\beta\subset\beta'$ 使

$$T_{\alpha+\beta}(A)=T_\alpha\circ T_\beta(A)$$

$$T_{\alpha+\beta}(f)=T_\alpha\circ T_\beta(f)$$

且$y=T_{\alpha+\beta}(x)$，$z=T_\alpha\circ T_\beta(x)$ 在**R**上一致成立，从而y，z 是同一壳方程的有界解，故 $y\equiv z$，即$T_{\alpha+\beta}(x)=T_\alpha\circ T_\beta(x)$，从而$x(t)$ 是概周期函数。又若 $T_\alpha(A)=A$，$T_\alpha(f)=f$，则由式(3) 知 $T_\alpha(x)=x$，因此$\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$，引理2证毕。

引理3[6,8] 设$\{f_n(t)\}$ 是概周期函数列，$f\in AP$，若$\mathrm{mod}(f_n)\subset\mathrm{mod}(f)$ $(n=1,2,\cdots)$，且$\{f_n(t)\}$ 在**R**上局部一致收敛于$f(t)$，则$\{f_n(t)\}$ 在**R**上一致收敛于$f(t)$。

引理4[4] 对于任意 $u\in C$，u_t 在BC_h 中关于t 是一致连续的。

引理5[4] 若有常数N，$\eta>0$，$M=\{u\in C_1|\ \|u\|\leqslant N,\ \|u'\|\leqslant\eta\}$，则$f(t,u_t)$ 关于 t 在 M 上是一致连续的。

2 主要结果及其证明

定理1 若存在概周期函数 $a(t)$，使得对任意$(t,x)\in R\times R^n$，有(H_1) $\mu(A(t,x))\leqslant a(t)$，且

$M(a)<0$; (H_2) 存在常数 $N>0$, 使 $\frac{b}{N}+qL<(1-q)D^{-1}$ 成立, 其中, $L=\sup_{t\in R,|x|<N}\|A(t,x)\|$, $b=\sup_{t\in R,|\varphi|_h}|f(t,\varphi)|$, $q=\int_{-\infty}^{0}\|q(s)\|\mathrm{d}s<1$, $D=\sup_{t\in R}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s$, 则微分方程(1) 存在概周期解 $x(t)$, 且当 $q=0$ 时, 有 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$ 成立。进一步, 若 $a(t)$ 为 ω 的周期函数, 则微分方程(1) 存在 ω 周期解。

证明: 任取 $u\in C_1$, 考虑如下方程

$$x'(t)=A[t,u(t)]x(t) \tag{4}$$

$$x'(t)=A[t,u(t)]x(t)+f(t,x_t)+\int_{-\infty}^{0}q(s)u'(t+s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

由引理 2 及条件 (H_1) 知方程(5) 有惟一的概周期解

$$x_u(t)=\int_{-\infty}^{0}X_u(t,s)\left[f(t,x_t)+\int_{-\infty}^{0}q(s)u'(s+r)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s$$

其中, $X_u(t,s)$ 是方程(4) 的基本解矩阵。由此我们定义 C_1 到 C_1 的算子 F, G, H, I, J:

$$(Fu)(t)=\int_{-\infty}^{t}X_u(t,s)f(s,u_s)\mathrm{d}s$$

$$(Gu)(t)=\int_{-\infty}^{t}X_u(t,s)\int_{-\infty}^{0}q(r)u'(r+s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

$$(Hu)(t)=(Gu)(t)-\int_{-\infty}^{0}q(r)u(r+t)\mathrm{d}r$$

$$I=H+F$$

$$(Ju)(t)=\int_{-\infty}^{0}q(r)u(r+t)\mathrm{d}r$$

容易证明 $I+J=F+G$。由条件 (H_2) 可取常数 $M>(1-q-qLD)^{-1}(LDb+b)>0$, 令 $S=\{u\mid u\in C_1,\|u\|\leqslant N,\|u'\|\leqslant M\}$。下面依次验证 S 满足 Krasnoselskii 不动点定理[9] 的条件: ¹ 对任意 $u,v\in S$, $Iu+Jv\in S$; ④J 是压缩映射; ㈣I 在 S 上是全连续的。

首先, 对任意 $u,v\in S$,

$$|(Fu)(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{t}\|X_u(t,s)\||f(s,u_s)|\mathrm{d}s\leqslant\int_{-\infty}^{t}\exp\left[\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right]|f(s,u_s)|\mathrm{d}s\leqslant Db \tag{6}$$

$$|(Hu)(t)|=\left|\int_{-\infty}^{t}X_u(t,s)A[s,u(s)]\left[\int_{-\infty}^{0}q(r)u(r+s)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s\right|\leqslant qDNL \tag{7}$$

由条件 (H_2) 及式(6)、(7) 知

$$|(Iu)(t)+(Ju)(t)|\leqslant|(Hu)(t)|+|(Fu)(t)|+|(Ju)(t)|\leqslant qNLD+Db+qN<N$$

从而

$$\|Iu+Jv\|\leqslant N$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Fu)(t)]=A[t,u(t)](Fu)(t)+f(t,u_t)$$

故

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Fu)(t)]\right|\leqslant\|A[t,u(t)]\||(Fu)(t)|+|f(t,u_t)|\leqslant LDb+b \tag{8}$$

类似于式(8), 有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Hu)(t)]\right|\leqslant LqDM\\&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Ju)(t)]\right|\leqslant qM\end{aligned} \tag{9}$$

由 M 的取法及式(8)、(9) 知

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Iu)(t)]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(Ju)(t)]\right| \leqslant LDb+b+LDMq+qM<M$$

故 $\|Iu'+Jv'\| \leqslant M$, 这里用到了 $0<q+DLq<1$。从而, 对任意 $u, v\in S$, $Iu+Jv\in S$ 且 $I(S)\subset S$, $J(S)\subset S$, 即 S 满足条件[1]。

条件 ④、㈣容易由 (H_2), 引理4和引理5得到。故由 Krasnoselskii 不动点定理知, $I+J$ 在 S 上存在不动点, 即方程(1)存在概周期解 $x(t)$。

由引理2知, $\mathrm{mod}\left[x(t)-\int_{-\infty}^{0}q(s)x(t+s)\mathrm{d}s\right]\subset \mathrm{mod}(A,f)$, 当 $q=0$ 时, 有 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$, 故结论成立。定理1证毕。

考虑条件[1]的特殊情形: $q(s)=0$ 且无时滞, 下面的定理是文献[5]相应结果的推广。

定理2 若下列条件满足 (H_3) $\mu[A(t,x)]\leqslant-\delta<0$, δ 为正常数; (H_4) 存在常数 $N>0$, 使 $\frac{b}{N}<\delta$, 其中 b 定义同上, 则微分方程(1)存在概周期解 $x(t)$, 且 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$ 成立。

证明: 取 $a(t)=-\delta$, 则 $D=\delta^{-1}$, 由引理2及定理1直接可推知结论成立。

注: 定理1和定理2是文献[5]主要结论的推广。特别是我们的条件与系统的周期 ω 无关, 这更能反映这类方程存在周期解的固有性质。

定理3 若下列条件满足: 对任意 $(t,x)\in R\times R^n$, 有 (H_5) 存在常数 $\delta, N_1>0$, 使 $\mu(A(t,x))\leqslant-\delta$, $\|A(t,x)\|\leqslant N_1$; (H_6) 存在概周期函数 $l(t)$, 使

$$|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)|\leqslant l(t)|\varphi_1-\varphi_2|_h,\quad \varphi_1,\varphi_2\in BC_h$$

并且 $l+qN_1<(1-q)\delta$, 其中, $l=\sup\limits_{t\in R}|l(t)|$, 则微分方程(1)存在惟一概周期解 $x(t)$, 且当 $q=0$ 时, 有 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$ 成立。

证明: 由条件 (H_6) 知, 对任意 $\varphi\in BC_h$, 有 $|f(t,\varphi)-f(t,0)|\leqslant l(t)|\varphi|_h$, 故 $|f(t,\varphi)|\leqslant l(t)|\varphi|_h+|f(t,0)|$, 从而

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\sup_{t\in R,|\varphi|_h\leqslant n}|f(t,\varphi)|\leqslant\sup_{t\in R}|l(t)|=l$$

取 $0<\varepsilon<(1-q)\delta-qN_1-l$, 则存在 $N>0$, 使 $\frac{b}{N}<l+\varepsilon$, 就有 $\frac{b}{N}+qN_1<(1-q)\delta$, 所以定理1的条件 (H_2) 满足, 故概周期解的存在性得证。

下面证明惟一性。设 $x(t), y(t)$ 是式(1)的两个概周期解, 且 $\|x-y\|\neq0$, 从而

$$x(t)=(Fx)(t)+(Gx)(t)$$
$$y(t)=(Fy)(t)+(Gy)(t)$$

故 $\|x-y\|\leqslant\frac{1}{\delta}l+q+\frac{1}{\delta}qN_1\|x-y\|$, 由条件 (H_6) 知, $\frac{1}{\delta}l+q+\frac{1}{\delta}qN_1<1$, 于是 $\|x-y\|<\|x-y\|$, 矛盾! 故 $\|x(t)-y(t)\|\equiv0$, 即有 $x(t)=y(t)$。后半部分结论的证明同定理1的证明。定理3证毕。

考虑如下方程

$$x(t)=A[t,x(t)]x(t)+f(t,x_t) \tag{10}$$

定理4 假设条件 (H_5) 成立, 并且 (H_7) 存在常数 $K>1$, 使得

$$|f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2)|\leqslant\frac{1}{k}a(t)|\varphi_1-\varphi_2|_h$$

成立, 则微分方程(10)存在惟一的一致稳定的概周期解 $x(t)$, 且 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$。

证明: 由定理3知, 方程(10)存在惟一的概周期解 $u(t)$。对任意 $\varepsilon>0$, $t_0\geqslant0$ 及 $\varphi\in BC_h$, 取 $\eta=\frac{k-1}{k+3}\varepsilon$。设 $|\varphi-u_{t_0}|_h<\eta$, $x(t;t_0,\varphi)$ 是方程过 (t_0,φ) 的解, 则 $x_{t_0}=\varphi$。于是有

$$x(t)=X(t,t_0)\varphi(0)+\int_0^t X(t,s)f(s,x_s)\mathrm{d}s$$

$$u(t)=X(t,t_0)u(t_0)+\int_0^t X(t,s)f(s,u_s)\mathrm{d}s$$

往证, 对 $t \geqslant t_0$, 必有 $|x(t)-u(t)|<\varepsilon$; 若不然, 则存在 $t_1>t_0$, 使 $|x(t)-u(t)|<\varepsilon$, $t\in[t_0,t_1)$, 但 $|x(t_1)-u(t_1)|=\varepsilon$, 于是

$$\varepsilon=|x(t_1)-u(t_1)|\leqslant \eta-\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t_1}\exp\left[\int_s^{t_1}a(r)\,\mathrm{d}r\right]a(s)|x_s-u_s|_h\,\mathrm{d}s$$

由于

$$|x_s-u_s|_h\leqslant\sup_{t_0\leqslant t\leqslant s}|x(t)-u(t)|+2\left|x_{t_0}-u_{t_0}\right|_h\leqslant\varepsilon+2\eta\quad(t_0\leqslant s\leqslant t_1)$$

故

$$\varepsilon\leqslant\eta+\frac{1}{k}(\varepsilon+2\eta)=\frac{k+1}{k+3}\varepsilon<\varepsilon$$

这是一个矛盾! 从而 $u(t)$ 是惟一的一致稳定的概周期解。由定理 1 及该定理条件知 $\mathrm{mod}(x)\subset\mathrm{mod}(A,f)$。定理 4 证毕。

3 应用实例

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x(t)+\int_{-\infty}^{0}\exp(20s)\,x(t+s)\,\mathrm{d}s\right]$$
$$=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sin t+\frac{1}{8}\sin(\sqrt{2}at)\right]x(t)+\int_{-\infty}^{t}\exp[8(s-t)]\,|\cos t|\,x(s)\,\mathrm{d}s+p(t)\qquad(11)$$

其中

$$p(t)=\frac{381}{401}\cos t+\frac{399}{802}\sin t-\frac{1}{8}\sin^2 t+\frac{|\cos t|}{65}(\cos t-8\sin t)$$

a 为有理数。易见系统满足定理 3 的条件。事实上, 取 $A(t,x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sin t+\frac{1}{8}\sin(\sqrt{2}at)$, $l(t)=\frac{1}{8}|\cos t|$, 从而 $l=\frac{1}{8}$, 取 $\delta=\frac{1}{4}$, $q=\frac{1}{20}$, $N_1=\frac{3}{4}$, 不难验证定理条件成立, 并且 $l+qN_1<(1-q)\delta$, 由定理 3 知方程有惟一的概周期解。特别地, 当 $a=0$ 时, 式(11) 存在惟一的 2π 周期解: $x(t)=\sin t$。

参 考 文 献:

[1] 王克, 黄启昌. C_h 空间与具有无穷时滞的泛函微分方程的有界性和周期解[J]. 中国科学, 1987, 17A(3): 242–252.

[2] 王全义. 具有无穷时滞的积分微分方程解的存在性、惟一性及稳定性[J]. 应用数学学报, 1998, 21(2): 312–318.

[3] 石磊. 具有无穷时滞中立型泛函微分方程的有界性及周期解[J]. 科学通报, 1990, 35(6): 409–411.

[4] 彭世国, 朱思铭. 具有无穷时滞泛函微分方程的周期解[J]. 数学年刊, 2002, 23A(3): 371–380.

[5] 曾唯尧. 高维非自治系统的概周期解[J]. 高校应用数学学报, 1992, 7(4): 610–614.

[6] Fink A M. Almost Periodic Differential Equations[M]. Springer-verlag, 1974.

[7] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994.

[8] 何崇佑. 概周期微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科技出版社, 1999.