

随机共振在微弱信号检测中的数值仿真*

杨定新 胡萼庆

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南长沙 410073)

摘要:对基于非线性双稳系统随机共振的微弱信号检测技术进行数值研究,利用随机共振机制,浸入在噪声中的微弱信号可以得到有效的放大与增强。给出了基于 Runge-Kutta 算法的双稳系统随机共振模型的求解方法,提出了利用随机共振检测微弱非周期信号的一种新思路。数值仿真结果表明,该方法不仅可以检测出强噪声极低频的微弱周期信号,而且可以对非周期信号进行有效的检测。

关键词:非线性双稳系统,随机共振,微弱信号检测,数值仿真

中图分类号:TP271 **文献标识码:**A

Numerical Simulation of Stochastic Resonance in Bistable System for Detecting Weak Signal

YANG Ding-xin, HU Niao-qing

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper deals with the numerical simulation of stochastic resonance (SR) for detection weak signal. SR is a nonlinear phenomenon generally occurring in dynamical bistable systems excited by noisy periodic signals. Through SR, weak signals immersed in heavy noise can be amplified and optimized by assistance of noise, due to the interplay between noise sources and nonlinearity of the system. We present the numerical method to solve the bistable SR model based on Runge-Kutta algorithm, and propose a new kind of approach for detecting weak signal, which can effectively detect both period and aperiodic weak signals corrupted by the strong noise background.

Key words: nonlinear bistable system, stochastic resonance, weak signal detection, numerical simulation

随机共振 (SR, Stochastic Resonance) 理论最初是由意大利学者 Benzi 等提出^[1], 用来解释地球远古气象中每隔 10 万年左右冰川期与暖气候期周期交替出现的现象。这一理论阐述了这样一个观念: 当浸入在强背景噪声中的微弱周期信号通过一个非线性系统时, 当系统非线性、信号与噪声达到某种匹配时, 背景噪声会增强微弱周期信号传输, 提高输出端信号的信噪比, 并且可以使系统的输出信噪比达到一个峰值。

随机共振为强噪声背景下微弱信号的传输与检测提供了一条新途径, 因此也受到人们广泛的关注与重视。在随机共振现象的研究中, 受微弱周期信号和高斯白噪声驱动的非线性双稳系统是最经常采用的一种非线性系统, 因为它具有简洁明了的物理意义。数学上, 描述双稳系统随机运动的 Langevin 方程是一种非线性随机微分方程, 由于这类方程不存在精确解的表达式^[2], 所以研究的一个关键就是非线性随机微分方程的求解。在随机共振研究中, 计算机数值仿真一直占有很重要的地位^[3], 随着计算机技术的飞速发展, 仿真精度越来越高, 速度越来越快, 数值仿真显示出更大的优越性。

本文给出了一种基于龙格—库塔算法的随机共振模型数值求解方法, 用于检测周期与非周期信号, 并且提出了利用随机共振检测微弱非周期信号的新思路。

* 收稿日期: 2003 - 04 - 28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275144)
作者简介: 杨定新(1975—), 男, 博士生。

1 非线性双稳系统随机共振模型及求解算法

受周期力与白噪声驱动的非线性双稳系统实质上描述的是一个质点同时受到外力和噪声驱动时,在如图1所示的对称双势阱中的运动。

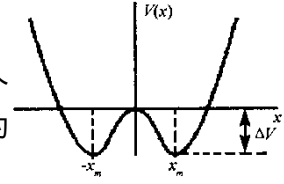


图1 对称双势阱图

Fig.1 Symmetric double-well potential

双稳系统可以由 Langevin 方程描述:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -V'(x) + u(t) + I(t) \\ \langle I(t) \rangle &= 0, \quad \langle I(t), I(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $V(x)$ 表示对称双势阱:

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 \quad (2)$$

对称双势阱两个势阱位置为 $\pm x_m$ ($x_m = (a/b)^{1/2}$), 势垒垒高 $\Delta V = a^2/(4b)$,

将(2)式代入(1)式得到:

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u(t) + I(t) \quad (3)$$

其中, x 为系统输出, a, b 为非线性系统结构参数, $I(t)$ 是均值为 0 噪声强度为 D 的高斯分布白噪声。当 $u(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ 时, 输入外力为高斯噪声驱动的余弦信号, 当输入(噪声 + 信号)为零时, $\pm \sqrt{x_m}$ 为系统的两个势阱。方程(3)描述了一个过阻尼的质点布朗运动。在没有调制和噪声作用时, 质点处于两个势阱中的任意一个势阱, 由系统的初始状态决定。当 $A > 0$ 时, 整个系统的平衡将被打破, 势阱在信号的驱动下, 按频率 ω 发生周期性的倾斜变化, A 只要处于临界值 A_c 以下(信号驱动频率较低时, $A_c = \sqrt{4a^3/27b}$), 质点仍只能在某个势阱内以相同的频率进行局域的周期性运动。然而当引入噪声后, 即使在 $A < A_c$, 甚至 $A \ll A_c$ 时, 质点也可以从原来的势阱跃迁到另外一个势阱。反之亦然, 此时, 系统已不是双稳系统, 系统输出按信号的调制频率 ω , 在两个势阱之间进行切换。当 $A > 0$ 时, 信号给系统势阱的切换引入周期变化, 有效地对噪声引起的切换进行同步, 从而使系统输出 $x(t)$ 中的小周期分量得到加强。这也就是随机共振可以加强微弱信号的最简明的解释。

实际上, 虽然对于非周期信号通过非线性系统时的随机共振现象, 从理论上进行证明尚存在困难, 但一系列的实际工作表明, 此时的输出信噪比同样存在极大值。

式(3)是一种特殊类型的微分方程, 事实上此类方程不存在精确解的表达式, 数值仿真证明是研究随机共振比较有效的方法^[4~6]。我们基于龙格-库塔算法提出了一种可以直接利用实验数据(噪声与数据混合)的数值求解算法。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= h(ax_n - bx_n^3 + p_n) \\ k_2 &= h\left[a\left(x_n + \frac{k_1}{2}\right) - b\left(x_n + \frac{k_1}{2}\right)^3 + p_n\right] \\ k_3 &= h\left[a\left(x_n + \frac{k_2}{2}\right) - b\left(x_n + \frac{k_2}{2}\right)^3 + p_{n+1}\right] \\ k_4 &= h\left[a(x_n + k_3) - b(x_n + k_3)^3 + p_{n+1}\right] \end{aligned} \quad (5)$$

式(4)(5)中, x_n, p_n 分别表示 $x(t)$ 和输入 $p(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + I(t)$ 的第 n 个采样值, $h = 1/f_s$ 为时间步长, 等于采样频率的倒数。

2 数值仿真结果

仿真实验中, 我们用微弱周期信号及非周期信号与高斯白噪声混合来进行数值仿真。

2.1 微弱周期信号检测

设有一混合信号 $s(t) = A\cos(2\pi ft) + n(t)$, 其中, $n(t)$ 是均值为 0、强度为 D 的高斯白噪声。我们

让混合信号通过双稳系统模型(4)(5), 原来的混合信号及双稳 SR 的输出信号用 FFT 进行分析, 并绘出它们的幅值谱。参数取值 $a = 0.01, b = 0.01, A = 0.003, f = 0.0001\text{Hz}, D = 0.0008$, 其中参数 a, b 的取值是综合考虑信号幅值的大小以及势阱势垒的高度, 通过试验最终确定的。得到混合信号:

$$r(t) = 0.003\cos(0.0002\pi t) + 0.04\xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t), \xi(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (6)$$

取采样频率 $f_s = 0.2\text{Hz}, h = 1/f_s = 5$, 采样点数 $N = 8000$ 。

图 2 给出原始混合信号、系统 SR 输出信号的波形及其幅值谱图。图 2(a) 为输入信号 $s(t)$ 的时域波形, 图 2(b) 为输入信号(加噪声)的幅值谱, 由图可见, 从时域波形中我们很难辨别出有周期成分存在, 幅值谱上也很难辨识出来。图 2(c) 为求解得到输出信号的时域波形, (d) 为输出信号的幅值谱。从图 2(d) 可以明显看到在频率 $f = 0.0001\text{Hz}$ 处有一根明显的谱线, 说明在此频率处有一个很强的周期成分存在。该频率正好等于输入信号频率。

此时 输入信噪比仅为 $\text{SNR} = 20\lg(A/\sqrt{2D}) = 20\lg(0.003/\sqrt{2 \times 0.0008}) = -22.4988(\text{dB})$

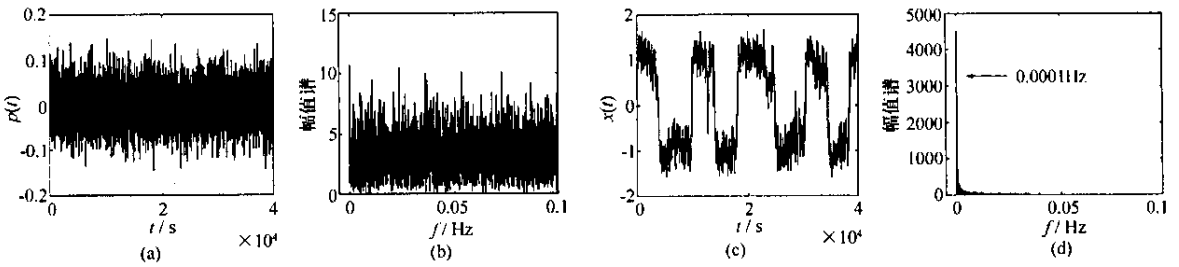


图 2 微弱周期信号检测结果

Fig.2 Results for detecting weak periodic signal

2.2 具有一定频谱宽度的微弱非周期信号检测

非周期随机共振也一直受到广泛关注。本文提出一种不同于文献[7]的微弱非周期信号检测思路。

对于具有一定频谱宽度的微弱非周期信号, 我们不是直接将带噪声的时域信号输入双稳 SR 振子, 而是首先对原始时域信号进行 FFT 分析, 然后将幅值谱信号再输入双稳 SR 振子, 来检测非周期信号。也就是利用双稳 SR 振子从原始信号的幅值谱中将非周期信号的幅值谱提取出来。

图 3 是一非周期信号的时域波形及频谱, 非周期信号具有一定频谱宽度, 其中心频率为 20Hz。

当噪声强度 $D = 0.0008$, 采样点数 $N = 4096$ 时, 混合输入信号波形及其频谱如图 4(a)(b) 所示。

取参数 $a = 1, b = 1, h = 1/f_s = 0.01$, 将图 4(b) 的数据输入双稳系统 SR 模型, SR 输出如图 4(c) 所示。由图可见, 输出与图 3(b) 的图形极相似, 峰值位置及频谱宽度与原始信号均相当一致。这样就将噪声中的微弱非周期信号提取了出来。

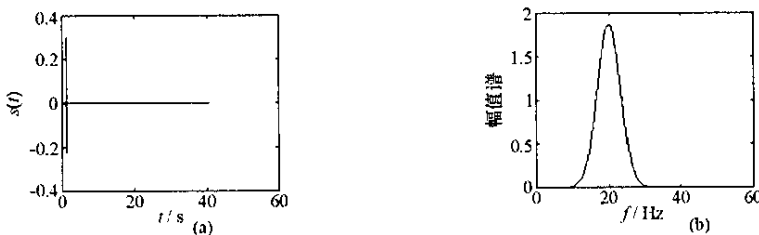


图 3 原始非周期信号波形与频谱图

Fig.3 Original aperiodic signal and its amplitude spectrum

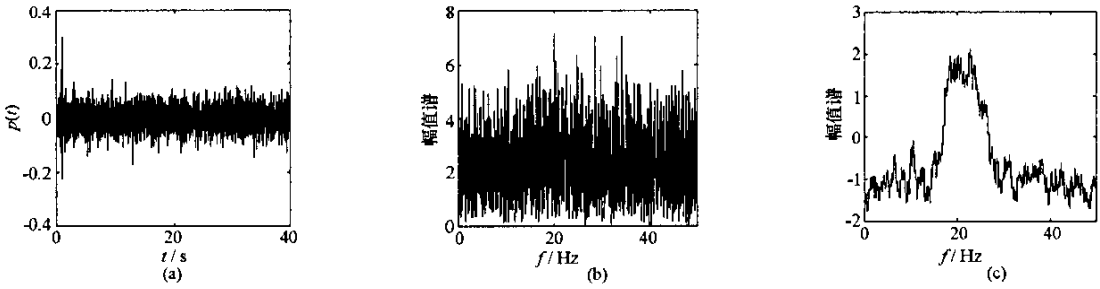


图4 微弱非周期信号频谱提取结果

Fig.4 Results for extracting weak aperiodic signal

3 结论

本文对非线性双稳系统随机共振模型进行了数值仿真,提出一种双稳SR模型的求解算法,并将其应用于微弱周期信号及非周期信号的检测,针对具有一定频谱宽度的微弱非周期信号提出了一种检测的新思路。

数值仿真表明,微弱信号的检测效果由于噪声的添加而得到改善,应用双稳系统的随机共振可以从强背景噪声中检测出非周期信号与极低频的微弱周期信号,这对于机械系统微弱非周期特征信号的提取,有一定的工程应用前景。

对于微弱周期信号的检测,信号的频率被限制在很低的范围,这与随机共振的理论是相符的,有关较高频率微弱周期信号的检测仍是有待研究的问题。

参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The Mechanism of Stochastic Resonance[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1981, 14: 453 - 457.
- [2] 胡岗. 随机力与非线性系统[M]. 上海:上海科技教育出版社,1994.
- [3] Gammaitoni L. Stochastic Resonance[J]. Reviews of Modern Physics, 1998, 70(1): 223 - 287.
- [4] Asdi A S, Tewfik A H. Detection of Weak Signals Using Adaptive Stochastic Resonance[C]. Proceeding of the 1995 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, May 1995: 1332 - 1335.
- [5] Mannella R. Fast and Precise Algorithm for Computer Simulation of Stochastic Differential Equations[J]. Physical Review A, 1989, 40(6): 3381 - 3386.
- [6] 胡葛庆,陈敏,温熙森. 随机共振在转子碰摩故障早期检测中的应用[J]. 机械工程学报, 2001, 31(9): 88 - 91.
- [7] Heneghan C, Chow C C. Information Measures Quantifying Aperiodic Stochastic Resonance[J]. Physical Review E, 1996, 54(3): R2228 - R2231.

