文章编号: 1001 – 2486(2003) 06 – 0106 – 05

对数正态分布加速因子的 Bayes 估计*

刘 琦, 冯 静, 周经伦
(国防科技大学人文与管理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 基于对数正态分布形式以及分布对数标准差不变的条件, 运用 Bayes 方法对对数正态分布加速寿命试验条件下的加速因子进行分析。首先基于全寿命试验数据和随机变量函数分布的理论推导出加速因子的先验分布; 然后由 Bayes 公式结合少量的现场截尾试验数据, 得出加速因子的 Bayes 估计模型; 最后给出实例进行说明。

关键词: Bayes 方法; 对数正态分布; 加速寿命试验; 加速因子
中图分类号: O212.8 文献标识码: A

The Bayes Method for Accelerated Factor of Lognormal Distribution Calculation

LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jing-lun
(College of Humanities and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Based on the condition of constant distribution and const logarithmic standard deviation for Lognormal distribution, the Bayes method is used to analyse the accelerated factor of accelerated life test. Firstly, according to the complete life test data and the theory of distribution for function of the random variable, the prior distribution of accelerated factor is presented. Then, combined with a small amount of field type Ⅱ test data, the Bayes formula is used to calculate the accelerate factor. An example is given to illustrate this method.

Key words: Bayes method; lognormal distribution; accelerated life test; accelerated factor

在高可靠、长寿命产品的可靠性评定中, 常用到恒应力加速寿命试验[1]。通常情况下可以获得应力条件下产品的大量试验数据, 但对于正常使用条件下, 产品的寿命数据较少, 而且多数为定时截尾寿命数据[2]。由于试验环境的差别, 需要借助于加速因子进行数据折合。在产品使用初期, 有可能获得产品的失效信息。利用加速寿命试验和少量的使用失效数据, 以及现场截尾试验数据对加速因子进行分析, 是正确评定产品使用可靠性的前提条件。

对对数正态分布加速因子进行分析, 现有的经典统计方法[4] 借助于极大似然理论, 推导出加速因子的估计, 但是该方法对于小子样条件下的可靠性试验数据, 其计算精度低, 而且难以实现。本文在假设分布形式以及对数标准差不变的前提下, 推导了对数正态分布加速因子的 Bayes 估计, 该方法计算简便, 易于计算机实现。

1 加速因子分析的前提及分布的检验

假设在加速试验条件下, 产品在各应力水平下的寿命分布为对数正态分布, 并且假设对数标准差 $\sigma(S)$ 与应力水平 S 无关, 即 $\sigma(S)=\sigma$, 为常数, 对产品所施加的应力对数均值为 $\mu(S)$。

记较恶劣的试验环境下应力水平为 S_1, 产品的寿命为 T_1, 服从对数均值为 μ_1、对数标准差为 σ_1 的对数正态分布, 简记为 $T_1\sim LN(\mu_1,\sigma_1)$; 较好的试验环境下应力水平为 S_2, 产品的寿命为 T_2, 服从对数均值为 μ_2、对数标准差为 σ_2 的对数正态分布, 简记为 $T_2\sim LN(\mu_2,\sigma_2)$。在应力水平 $S_i(i=1,2)$ 下,

* 收稿日期: 2003 – 04 – 10
基金项目: 总装备部年度课题资助项目
作者简介: 刘琦(1974—), 男, 博士生。

设产品投试 n_i 台,其中有 r_i 台失效$(2 \leqslant r_i \leqslant n_i)$,第 i 个应力水平下的第j 次失效时间记为$t_{ij}(j = 1, \cdots, r_i)$,试验结果简记为$(n_i, r_i)$。

在应力水平 $S_i(i = 1, 2)$ 下,对数正态分布[3] 的密度函数和可靠性函数分别为:

$$\begin{cases} f_i(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}\exp\left[-\dfrac{(\ln t - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right] \\ R_i(t) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\ln t - \mu_i}{\sigma_i}\right) \end{cases} \tag{1}$$

由文献[1],应力水平 S_2 对 S_1 的加速因子可表示为:

$$a(S_1, S_2) = \exp(\mu_1 - \mu_2) \tag{2}$$

为便于计算,定义应力水平 S_2 对 S_1 的加速因子 K 为:

$$K = \mu_1 - \mu_2 \tag{3}$$

在对加速因子进行分析之前,需要进行分布的假设检验和对数标准差的假设检验工作,前者是为了确保所研究的系统在两种应力水平下其寿命均服从于对数正态分布,后者是为了确保两种应力水平下系统的对数标准差相同。

对试验结果(n_i, r_i) 的正态性假设检验需要在全寿命试验条件下,即 $n_i = r_i(i = 1, 2)$ 时进行。取 $\tau_{ij} = \ln t_{ij}(i = 1, 2; j = 1, 2, \cdots, r_i)$,对 τ_{ij} 作分布的正态性假设检验,常用的检验方法有:Sharp-Wilk 检验、D 检验等[5]。得出的数据在满足正态性假设后,需要对两种应力水平下的对数标准差作一致性假设检验[3]。

在全样本试验条件下,对数标准差相同时,可得出 $\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 的极大似然估计如下:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum\limits_{j=1}^{n_1}\ln t_{1j} \\ \hat{\sigma}_2^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2} \end{cases} \tag{4}$$

其中,

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(\ln t_{ij} - \overline{T}_i)^2$$

$$\overline{T}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{r_i}\ln t_{ij} \quad (i = 1, 2)$$

2　加速因子先验分布的确定

Bayes 方法应用的关键是先验分布的选择,对于加速因子先验分布的选择方法,着重考虑以下几种情况:

(1) 无信息先验

由对数正态分布位置参数的无信息先验的确定方法或者 Fisher 信息阵[7] 无信息先验的确定方法,在 σ_2^2 已知的情形下可以得出:

$$\pi(\mu_2) \propto 1, \quad \mu_2 \in (-\infty, \infty) \tag{5}$$

μ_1 可以通过大量的地面性能试车数据得出较为精确的估计结果,所以在得出 μ_2 的Bayes估计 $\hat{\mu}_{2B}$ 之后,可以得到环境因子 K 的估计:

$$\hat{K} = \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_{2B} \tag{6}$$

(2) 专家信息

多数情况下,可以由专家信息得出 K 的取值范围(K_A, K_B)。其中,K_A 可以为$-\infty$,K_B 可以为 ∞,分别表示环境因子小于或者大于某个固定值。进一步可以由专家信息给出先验分布的形式或者表达式 $\pi(K)$,否则可以考虑以下三种分布。

® 均匀分布

$$\pi(K) \propto 1, \quad K \in (K_A, K_B) \tag{7}$$

其中, $K_A > -\infty$, $K_B < \infty$, 由专家信息得出。

® 增(减) 函数分布

$$\pi(K) \propto K^{-c}, \quad K \in (K_A, \infty); K_A > 0 \tag{8}$$

或

$$\pi(K) \propto (-K)^{-c}, \quad K \in (-\infty, K_B); K_B < 0 \tag{9}$$

其中, 超参数 $c > 1$ 由专家信息给出或者运用 ML- II[7] (极大似然法- II) 得出。

® 正态分布

$$\pi(K) = N(\mu_K, \sigma_K^2) \tag{10}$$

其中, 超参数 μ_K、σ_K^2 由专家信息给出或者运用 ML- II(极大似然法- II) 得出。

根据不同的环境试验需要, 专家还可以选择其他的适当分布形式。

(3) Fiducial 推断先验确定

由正态分布的性质可以得到[3]

$$(\overline{T}_1 - \overline{T}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \sim N\left(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \tag{11}$$

寿命试验后, 可以得到 $\overline{T}_i$ 的具体值, 由 Bayes 理论, 将加速因子 K 作为随机变量进行分析[6], 由(6)式可以得出:

$$K \sim N\left((\overline{T}_1 - \overline{T}_2), \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) \triangleq \pi(K) \tag{12}$$

3 加速因子 K 的 Bayes 估计

以式(7) ~ (10) 作为 K 的先验分布[7]。由应力水平 S_2 下的试验数据(n_2, r_2)(若由专家信息等途径得出应力水平 S_2 下的试验数据服从对数正态分布, 且其对数标准差与应力水平 S_1 下的对数标准差相同, 则此时的(n_2, r_2) 可以为截尾试验数据[2]), 在 K 给定的情况下, 将 $\mu_2 = \mu_1 - K$ 带入(1) 式得到:

$$\begin{cases} f_2(t_{2j} \mid K) = \dfrac{1}{t_{2j}\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left[-\dfrac{(\ln t_{2j} - \mu_1 + K)^2}{2\sigma_2^2}\right] \\ R_2(t_{2r} \mid K) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\ln t_{2r} - \mu_1 + K}{\sigma_2}\right) \end{cases} \tag{13}$$

得出样本的似然函数为:

$$L(n_2, r_2 \mid K) = \left[\prod_{j=1}^{r_2} f_2(t_{2j} \mid K)\right] [R_2(t_{2r} \mid K)]^{n_2 - r_2} \tag{14}$$

由 Bayes 公式, 得出 K 的后验分布:

$$\pi(K \mid n_2, r_2) = \frac{\pi(K) L(n_2, r_2 \mid K)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(K) L(n_2, r_2 \mid K) \mathrm{d}K} \tag{15}$$

对式(12) 所示的先验分布, 若系统无其他试验数据, 则以 K 的先验分布 $\pi(K)$ 为基础分析加速因子, 得出 K 的期望如下:

$$\hat{K}_B = E(K) \tag{16}$$

若系统有另外一组环境应力水平 S_2 下的试验数据(n, r), 失效时间分别为 t_l($l = 1, \cdots, r$), 则运用 Bayes 公式[7] 作进一步分析。

类似于式(13)、(14), 得出试验结果(n, r) 的似然函数为:

$$L(n, r \mid K) = \left[\prod_{l=1}^{r} f_2(t_l \mid K)\right] [R_2(t_r \mid K)]^{n-r} \tag{17}$$

运用 Bayes 公式, K 的后验分布为:

$$\pi(K \mid n, r) = \frac{\pi(K)L(n, r \mid K)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(K)L(n, r \mid K)\,\mathrm{d}K} \tag{18}$$

在 $\sigma_1 = \sigma_2$ 下:

$$\pi(K \mid n, r) = \frac{\exp\left[-\frac{n_1 n_2(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 - K)^2}{2\sigma_2^2(n_1+n_2)} - \sum_{l=1}^{r}\frac{(\ln t_l - \mu_1 + K)^2}{2\sigma_2^2}\right]\left(\int_{\frac{\ln t_r - \mu_1 + K}{\sigma_2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)^{n-r}}{\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{n_1 n_2(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 - K)^2}{2\sigma_2^2(n_1+n_2)} - \sum_{l=1}^{r}\frac{(\ln t_l - \mu_1 + K)^2}{2\sigma_2^2}\right]\left(\int_{\frac{\ln t_r - \mu_1 + K}{\sigma_2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)^{n-r}\right\}\mathrm{d}K} \tag{19}$$

由式(15)、(19)，求期望得出 K 的 Bayes 估计:

$$\hat{K}_B = E(K \mid n, r) \tag{20}$$

但是由于 μ_1 与 σ_2^2 均未知，因此，将 μ_1 与 σ_2^2 的估计值 $\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 带入计算。在通常情况下，恶劣环境(例如加速应力环境) 的试验数据较多，这样以 $\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 的值代替精确值的误差就相对较小。

4　举 例

在对某复杂系统的加速寿命试验分析中，得到应力环境 S_1 下的全样本试验数据，取对数后为:

4.7405, 4.0006, 5.0752, 5.1726, 4.3121, 5.7145, 5.7135, 4.9774, 5.1964, 5.1048

应力环境 S_2 下的全样本试验数据取对数后为:

6.3121, 7.3145, 7.7135, 6.7774

现对其加速因子进行分析。

对于 S_1 下的试验数据，由 Sharp-Wilk 检验[5]，可以得到 $W = 0.6075$，在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下满足 $W < Z_\alpha$，所以可以接受环境 1 下的试验数据服从对数正态分布的假设。

而对于 S_2 下的试验数据，由 Sharp-Wilk 检验[5]，得到 $W = 0.6346$，在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下满足 $W < Z_\alpha$，所以可以接受环境 2 下的试验数据服从对数正态分布的假设。

在 $\alpha = 0.1$ 时，$\frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.7818$，小于 $F_\alpha(9, 3)$，由文献[3]，可以认为两种应力环境下的对数标准差相等。

因此得到环境 2 下的第二组截尾时间为 600 的定时截尾试验数据中有 8 次成功，2 次失效，失效时间分别为: 528.266, 557.242。

由极大似然估计得到 $\hat{\mu}_1 = \bar{T}_1 = 5.007$, $\bar{T}_2 = 7.0294$, $\hat{\sigma}_2^2 = 0.2694$。

若假设由专家信息等方法得到 S_2 下的寿命试验数据服从对数正态分布，对数标准差与 S_1 下的相同，并且由专家信息得出加速因子 K 的先验分布为[−3, −1] 上的均匀分布，则无须进行应力环境下的全样本试验。由公式(7)、(14)、(15)、(20) 得出加速因子的 Bayes 估计为 −1.9630。

均匀先验分布如图 1 直线 U 所示，相应的环境因子的后验分布曲线如图 1 中的 UP 所示。

在全寿命试验下，由式(12) 得出 K 的先验分布，其密度函数如曲线 F 所示，后验密度曲线如图 FP 所示。由(20) 式，得到 K 的 Bayes 估计为 −1.9840。

此例的真实数据为 $LN(5, 0.25)$, $LN(7, 0.25)$，可见运用 Bayes 估计的精度相对较高。

5　说 明

该方法对于分布形式不变情况下对数正态分布的环境因子具有较高的精度，计算简便，便于计算机实现，易于工程应用。需要指出的是: 应力水平 1 的试验数据量越大，$\hat{\mu}_1$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 的值与精确值就越接近，此时运用 Bayes 方法，加速因子的计算结果就越接近于真实值。

对于多组应力水平 2 下的试验数据进行分析时，要运用 Bayes 相继率[6] 进行。

通常情况下，环境 2 第一组的全样本试验数据较少，此时进行正态性假设检验，比较困难，所以若由专家信息等可确定该应力水平条件下、系统的寿命服从对数正态分布，则无须进行正态性检验。直接运

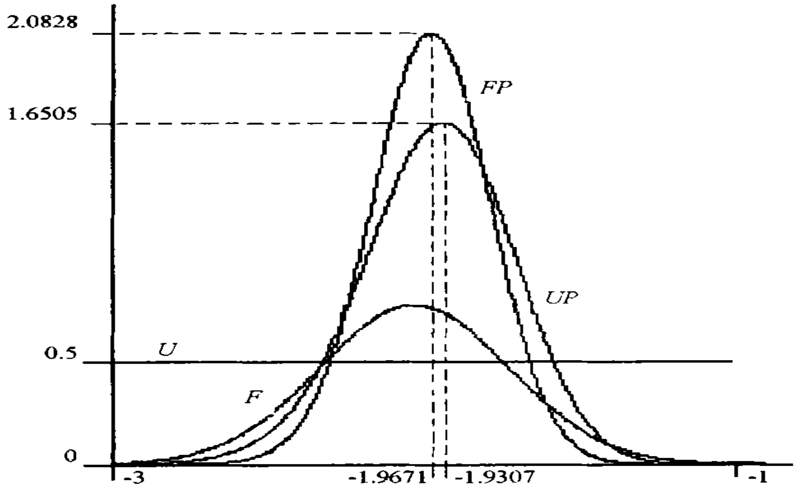

图 1 加速因子的先、后验分布
Fig. 1 The prior and posterior distribution of accelerated factor

用公式(7) ~ (10)、(14)、(15)、(20) 进行分析。

若由专家信息等途径能确定两种试验环境下的分布的对数标准差相同, 则由式(4) 计算 σ_2^2; 否则需要运用极大似然方法对 σ_1^2、σ_2^2 分别进行计算, 再由式(7) 得出加速因子的先验分布后, 再进行分析。

运用式(12)、(13) 进行加速因子的 Bayes 分析时, 可直接利用正态分布表简化运算。

参 考 文 献:

[1] 张志华. 加速寿命试验及其统计分析[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 2002.
[2] 周源泉, 翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京: 北京科学出版社, 1990.
[3] 《现代应用数学手册》编委会. 概率统计与随机过程卷[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
[4] 赵培东, 费鹤良. 对数正态分布场合恒定应力加速寿命试验的 MLE 和 AMLE[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1997, 26(1).
[5] 统计方法应用国家标准汇编, 统计分析与数据处理卷[S]. 北京: 中国标准出版社, 1999.
[6] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
[7] Berger J O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis(Second Edition)[M]. New York, Springer-Verlag Inc., 1985.