文章编号:1001 - 2486(2004)01 - 0060 - 04

H^{∞} 滤波的广义平方根算法*

蔡 洪
(国防科技大学航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要 研究 H^{∞} 广义平方根滤波。引入非定矩阵的广义平方根分解,给出了使矩阵三角化的双曲变换矩阵的存在性判别及其求取方法,从而使 H^{∞} 滤波的存在性判别以及 H^{∞} 广义平方根滤波的算法得以实现。

关键词:H^{∞} 滤波;平方根滤波;双曲变换
中图分类号:TP271.8 **文献标识码**:A

The Generalized Square-root Algorithm for H^{∞} Filter

CAI Hong
(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract:We study the square-root algorithm for H^{∞} filter by introducing the generalized square-root factorization for indefinite matrices. A method to calculate the hyperbolic transformations for triangularizing a given matrix, including the testing of its existence condition, is proposed. The H^{∞} generalized square-root filter can thereby be algorithmically realized.

Key words:H^{∞} filter; square-root filter; hyperbolic transformation

对于以线性状态空间模型描述的系统,Kalman 滤波提供系统状态的无偏最小均方差估计[1]。Kalman 滤波从 20 世纪 60 年代被提出以来,一直在信号处理与控制理论等领域扮演极其重要的角色。其应用是如此之广泛,以至于有被滥用之嫌[2]。

Kalman 滤波的估计优良性是建立在模型准确这一基础上的。如果模型假设与真实不符,滤波的性能会大大退化,甚至出现异常现象[3]。Kalman 滤波对模型误差的敏感性促使人们研究所谓的稳健滤波,如 H^{∞} 滤波[4,5],旨在抑制整个滤波运行过程中模型不确定性的影响。

在滤波运行过程中,滤波增益的计算是关键。为提高计算过程中的数值稳定性,平方根矩阵算法被引入到滤波增益的计算,如平方根 Kalman 滤波[6],矩阵 QR 分解方法可以使其易于实现。

在 H^{∞} 滤波中,不定矩阵的出现使得其常规意义下的平方根分解不存在,因此 H^{∞} 平方根滤波不同于平方根 Kalman 滤波,称其为广义平方根滤波。

1 H^{∞} 滤波

考虑如下线性状态空间模型:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{i+1} = \boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{W}_i \\ \boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{H}_i\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{V}_i \end{cases} \tag{1}$$

其中,状态向量为 n 维,测量向量为 p 维,$\{\boldsymbol{W}_i\}$,$\{\boldsymbol{V}_i\}$ 为未知的动力学干扰及测量噪声干扰,$\{\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{H}_i\}$ 为适当维数的已知矩阵,状态初值 X_0 未知。设待估计的 q 维向量为:

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{L}_i\boldsymbol{X}_i \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{L}_i$ 已知。

定义 $\hat{S}_{i|i}$,$\hat{X}_{i|i}$ 分别为基于测量值 $\{Z_0, Z_1, \cdots, Z_i\}$ 的 S_i 和 X_i 的估计。给定水平 $\gamma > 0$,状态向量的线

* 收稿日期:2003 - 08 - 28
基金项目:国家留学基金资助项目(20302068)
作者简介:蔡洪(1967—),男,副教授,博士。

性组合 $S_i = L_i X_i (i = 0,1,\cdots,N)$ 的 H∞ 滤波可取为满足如下约束的解 $\hat{S}_{i|i}$。

$$\sup_{X_0,\{W_i\},\{V_i\}} \frac{\sum_{i=0}^{N} |S_i - \hat{S}_{i|i}|^2}{(X_0 - \hat{X}_0)^{\mathrm{T}} \Pi_0^{-1} (X_0 - \hat{X}_0) + \sum_{i=0}^{N} W_i^{\mathrm{T}} Q_i^{-1} W_i + \sum_{i=0}^{N} V_i^{\mathrm{T}} R_i^{-1} V_i} < \gamma^2 \tag{3}$$

关于上式中的 $\{Q_i\}$，$\{R_i\}$，作如下解释：

（1）对于确定性系统，$\{Q_i\}$，$\{R_i\}$ 可理解为加权矩阵，因为对于实际应用问题，$\{W_i\}$，$\{V_i\}$ 的度量尺度往往是不相同的，为了使其具有可比性，(3) 式分母中的求和项取加权范数是必要的。

（2）对于随机系统，$\{Q_i\}$，$\{R_i\}$ 可理解为动力学噪声和测量噪声方差矩阵，正如标准 Kalman 滤波对模型所作的假设。

H∞ 滤波并非对于任意水平 $\gamma > 0$ 都存在，事实上，水平 γ 给得太小，容易使得 H∞ 滤波不存在。如果存在，$\hat{S}_{i|i}$ 可由如下 H∞ 滤波公式给出[4]：

$$\hat{S}_{i|i} = L_i \hat{X}_{i|i} \tag{4a}$$

$$\hat{X}_{i+1|i+1} = \Phi_i \hat{X}_{i|i} + K_{i+1}(Z_{i+1} - H_{i+1}\Phi_i \hat{X}_{i|i}) \tag{4b}$$

$$K_{i+1} = P_{i+1} H_{i+1}^{\mathrm{T}} (H_{i+1} P_{i+1} H_{i+1}^{\mathrm{T}} + R_{i+1})^{-1} \tag{4c}$$

$$P_{i+1} = \Phi_i P_i \Phi_i^{\mathrm{T}} + Q_i - \Phi_i P_i [H_i^{\mathrm{T}} \quad L_i^{\mathrm{T}}] R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i \Phi_i^{\mathrm{T}} \tag{4d}$$

$$R_{e,i} = \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} P_i [H_i^{\mathrm{T}} \quad L_i^{\mathrm{T}}] \tag{4e}$$

滤波初始条件为：$\hat{X}_{0|0} = \hat{X}_0, P_0 = \Pi_0$。

注意到如果应用 Kalman 滤波，只需将(4) 式中的(4d)，(4e) 取代为：

$$P_{i+1} = \Phi_i P_i \Phi_i^{\mathrm{T}} + Q_i - \Phi_i P_i H_i^{\mathrm{T}} R_{e,i}^{-1} H_i P_i \Phi_i^{\mathrm{T}} \tag{5a}$$

$$R_{e,i} = R_i + H_i P_i H_i^{\mathrm{T}} \tag{5b}$$

从(4) 式可以看到，H∞ 滤波同标准 Kalman 滤波在形式上极为相似，亦可看出 H∞ 滤波同 Kalman 滤波有实质性区别。在 Kalman 滤波中，滤波增益与系数矩阵 L_i 无关；而在 H∞ 滤波中，系数矩阵 L_i 参与滤波增益的计算。

2　H∞ 平方根滤波

平方根滤波是建立在矩阵的平方根分解这一基础上的，如平方根 Kalman 滤波[6]。参与增益矩阵递推计算的有关方差阵均被进行平方根分解，以上三角阵 $Q^{1/2}$，$R^{1/2}$，$P^{1/2}$ 的形式出现。非负定矩阵 Q 的平方根矩阵 $Q^{1/2}$ 定义为：$Q = Q^{\mathrm{T}/2} Q^{1/2}$，$Q^{1/2}$ 为上三角阵，$Q^{\mathrm{T}/2}$ 为 $Q^{1/2}$ 的转置。

将平方根滤波的思想应用于 H∞ 滤波时发现，H∞ 滤波中需进行平方根分解的某些矩阵不满足‘非负定”这一条件。如考察 H∞ 滤波公式中的(4d)，(4e) 可知，$\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ 对应于 Kalman 滤波中的测量噪声方差矩阵，但由于它是不定矩阵，所以它不是常规意义下的方差矩阵，称其为广义方差矩阵。显然无法将其进行常规意义下的平方根分解，为此，引入广义平方根矩阵的概念：

若对称矩阵 Q 可表示为 $Q = Q^{\mathrm{T}/2} S Q^{1/2}$，其中 $Q^{1/2}$ 为上三角阵，$Q^{\mathrm{T}/2}$ 为 $Q^{1/2}$ 的转置，$S = \mathrm{diag}(\pm 1)$ 为标签矩阵，则称 $Q^{1/2}$ 为 Q 的对应于标签矩阵 S 的广义平方根矩阵。

于是，有如下 H∞ 平方根滤波[7,4]：

$$\Theta_i^{(1)} \begin{bmatrix} R^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma I_q & 0 \\ P_i^{1/2} H_i^{\mathrm{T}} & P_i^{1/2} L_i^{\mathrm{T}} & P_i^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{e,i}^{1/2} & R_{e,i}^{1/2} K_{f,i}^{\mathrm{T}} \\ 0 & P_{i|i}^{1/2} \end{bmatrix} \tag{6a}$$

$$\Theta_i^{(2)}\begin{bmatrix}P_{i|i}^{1/2}\Phi_i^{\mathrm{T}}\\ Q_i^{1/2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{i+1}^{1/2}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{6b}$$

其中，各平方根矩阵均为上三角阵，除 $R_{e,i}^{1/2}$ 为广义平方根矩阵外，其他均为常规意义下的平方根矩阵，$R_{e,i}^{1/2}$ 满足 $R_{e,i}^{\mathrm{T}/2}\mathrm{diag}(I_p,-I_q)R_{e,i}^{1/2}=R_{e,i}$。$\Theta_i^{(1)}$，$\Theta_i^{(2)}$ 为变换矩阵，其作用是将矩阵上三角化；所不同的是，$\Theta_i^{(2)}$ 为常规的单位正交变换矩阵，可由矩阵 QR 分解方法得到，而 $\Theta_i^{(1)}$ 为对应于标签矩阵 $S^{(1)}=\mathrm{diag}(I_p,-I_q,I_n)$ 的双曲变换矩阵，它满足 $\Theta_i^{(1)\mathrm{T}}S^{(1)}\Theta_i^{(1)}=S^{(1)}$。

记

$$[R_{e,i}^{1/2}\quad R_{e,i}^{1/2}K_{f,i}^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}T_{11}&T_{12}&A_1\\ \mathbf{0}&T_{22}&A_2\end{bmatrix} \tag{7}$$

注意到(7)式右边各分块矩阵的维数为 $T_{11}:p\times p$；$T_{12}:p\times q$；$T_{22}:q\times q$；$A_1:p\times n$；$A_2:q\times n$。

H^∞ 滤波增益为：

$$K_i=A_1^{\mathrm{T}}T_{11}^{-\mathrm{T}} \tag{8}$$

H^∞ 平方根滤波算法具有一个非常有用的特性，就是滤波的存在性判别包含在算法本身当中。如果算法能够运行下去，则给定水平 γ 的 H^∞ 滤波存在；否则，给定水平 γ 的 H^∞ 滤波不存在。

3 H^∞ 平方根滤波的算法实现

由(6)式可知，H^∞ 平方根滤波算法的核心问题是，对于给定的矩阵，寻找对应于给定标签矩阵的双曲变换矩阵，使其上三角化。

首先讨论向量的双曲变换。设双曲变换矩阵 Θ 将 n 维向量 x 映射为 αe_1，其中，$e_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，标签矩阵为 $S=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，$\sigma_i=\pm 1$，即有

$$\Theta x=\alpha e_1 \tag{9}$$

考虑到双曲变换矩阵的性质，由(9)式可得

$$x^{\mathrm{T}}Sx=\alpha^2\sigma_1 \tag{10}$$

由此可得，Θ 存在的充要条件为：

$$\mathrm{sign}(\sigma_1)x^{\mathrm{T}}Sx>0 \tag{11}$$

对应于标签矩阵 S 的双曲变换矩阵的一般形式可表示为[8,9]：

$$\Theta=\Theta(S,b)=S-2\frac{bb^{\mathrm{T}}}{b^{\mathrm{T}}Sb} \tag{12}$$

按(11)式判别 Θ 是否存在，如 Θ 存在，可取 b 为[8]：

$$b=Sx+\rho\sqrt{|x^{\mathrm{T}}Sx|}\,e_1 \tag{13}$$

其中

$$\rho=\begin{cases}\mathrm{sign}(\sigma_1), & x_1\geqslant 0\\ -\mathrm{sign}(\sigma_1), & x_1<0\end{cases} \tag{14}$$

上式中 x_1 为向量 x 的第一个元素。

将(13)式代入(12)式即可得到 Θ，并可得，

$$\alpha=-\rho\sqrt{|x^{\mathrm{T}}Sx|} \tag{15}$$

对于矩阵的双曲变换上三角化，可按列进行。设 $n\times m$ 维的矩阵 A，$n\geqslant m$，对应于 $S=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，$\sigma_i=\pm 1$ 的双曲变换矩阵 Θ 满足 $\Theta A=\begin{bmatrix}R\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$，$R$ 为上三角阵。记 $A_{i:j,k}=(a_{ik},a_{i+1,k},\cdots,a_{jk})^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 A 的第 k 列第 i 至 j 行的元素组成的列向量，应用前述的向量双曲变换求取算法，Θ 可按如下步骤求得：

- 对向量 $A_{1:n,1}$，求其对应于 $S_1=S$ 的双曲变换矩阵 Θ_1，同时得 $A^{(1)}=\Theta_1A$；

• 对向量 $A^{(1)}_{2:n,2}$，求其对应于 $S_2 = \mathrm{diag}(\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 的双曲变换矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_2$，同时得 $A^{(2)} = \mathrm{diag}(1,\boldsymbol{\Theta}_2)\boldsymbol{\Theta}_1 A$ 。依此类推。即对于 $i = 2,\cdots,m$，对向量 $A^{(i-1)}_{i:n,i}$，求其对应于 $S_i = \mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的双曲变换矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_i$，同时得 $A^{(i)} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{i-1},\boldsymbol{\Theta}_i)\cdots\mathrm{diag}(1,\boldsymbol{\Theta}_2)\boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{A}$。

直到 $i = m$，$\boldsymbol{A}(m)$ 即为变换后的上三角矩阵，相应的双曲变换矩阵为：

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_{m-1},\boldsymbol{\Theta}_m)\cdots\mathrm{diag}(1,\boldsymbol{\Theta}_2)\boldsymbol{\Theta}_1 \tag{16}$$

需要指出的是，在求矩阵双曲变换的过程中，涉及到一系列的向量双曲变换求取，每次求取向量双曲变换矩阵都应进行存在性判别，只有当 $\boldsymbol{\Theta}_1,\cdots,\boldsymbol{\Theta}_m$ 都存在时，$\boldsymbol{\Theta}$ 才存在。

4　讨 论

对比于 Kalman 滤波来说，H^∞ 滤波的提出是为了提高滤波的稳健性。H^∞ 滤波的稳健性与水平 γ 有关。γ 越小，滤波稳健性越好。但 γ 太小，又可能造成 H^∞ 滤波不存在。要给出最优的 H^∞ 滤波水平 γ 是困难的，除非是极端特殊的情况[4]。

从 H^∞ 滤波公式中易于得出，Kalman 滤波是 H^∞ 滤波在水平 γ 趋于无穷大时的特例。

H^∞ 滤波的平方根算法不仅能提高 H^∞ 滤波计算的数值稳定性，更为重要的是，其运算过程本身包含了存在性判别，算法能运行即表明所给定水平的 H^∞ 滤波存在。

在 H^∞ 滤波的平方根算法中，滤波存在性判别实际上由双曲变换矩阵的存在性判别给出，即由(11)式来判别。值得指出的是，(11) 式作为双曲变换矩阵存在的充要条件，只是理论上的结果。在实际应用中，基于计算机字长、计算精度、数值稳定性等方面的考虑，(11) 式应该修改为：

$$\mathrm{sign}(\sigma_1)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} > \varepsilon \tag{17}$$

其中，ε 为给定的小的正数。

致 谢

感谢法国波尔多第一大学自动化、生产、信号与图像实验室 Mohamed Najim 教授对作者在其实验室进行访问研究包括撰写本文所提供的指导和帮助。同时感谢与作者一同进行访问研究的保加利亚索非亚技术大学自动化系 Nicolai Christov 教授，本文受益于与其经常性的讨论。

参 考 文 献：

[1] Haykin S. Adaptive Filter Theory (3rd Edition) [M]. Prentice-Hall, N J, 1996.

[2] Cipra B. Engineers Look to Kalman Filtering for Guidance [J]. SIAM News, 1993, 26(5).

[3] 张金槐，蔡洪. 飞行器试验统计学 [M]. 长沙：国防科技大学出版社，1995.

[4] Hassibi B, Sayed A H, Kailath T. Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to H^2 and H^∞ Theories [M]. SIAM, PA, 1999.

[5] Sayed H. A Framework for State-space Estimation with Uncertain Models [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2001, (46): 998 - 1013.

[6] Kaminski P G, Bryson A E, Schmidt S F. Discrete Square-root Filtering: A Survey of Current Techniques [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1971, (16): 727 - 735.

[7] Hassibi B, Kailath T, Sayed A H. Array Algorithms for H^∞ Estimation [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2000, (45): 702 - 706.

[8] Bojanczyk A, Qiao S, Steinhardt A O. Unifying Unitary and Hyperbolic Transformations [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2000, (316): 183 - 197.

[9] Rader C M, Steinhardt A O. Hyperbolic Householder Transformations [J]. IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1986, (34): 1589 - 1602.