

一种使用非等权值粒子的确定性粒子滤波算法*

李 涛,薛祖瑞,胡小平

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南长沙 410073)

摘 要 介绍了粒子滤波及随机分布的代表点理论,将统计学中的数论方法应用于粒子滤波,使用随机分布的均方差代表点,对粒子滤波中关键的初始粒子生成、重点密度采样及再采样过程给出了相应的代表点算法,得到了一个包含最少随机操作的、使用非等权值粒子的确定性粒子滤波算法。仿真结果表明,确定性粒子滤波算法不仅是可行的,而且其滤波性能及计算效率均有不同程度的提高。

关键词 贝叶斯估计 粒子滤波 均方差代表点 蒙特卡罗方法

中图分类号 O212.8 **文献标识码** A

A Deterministic Particle Filter with Unequally Weighted Particles

LI Tao, XUE Zu-ru, HU Xiao-ping

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract The principles of the particle filter and the representative-points of random distribution are introduced. The number-theoretic method in statistics is applied to the particle filter. The corresponding rep-points algorithms, which include the generation of initial particles, the sampling of the importance density and re-sampling, is given using the MSE rep-points. Then a deterministic particle filter algorithm, with the fewest random operative and unequally weighted particles, can be built. The simulation results show that not only the algorithm is feasible, but the performance and computational efficiency can be also improved to a certain extent.

Key words Bayesian estimation, particle filter, MSE rep-points, Monte-Carlo method

当前,随着计算机计算能力的快速增长和计算成本的不断降低,粒子滤波(Particle Filter)已经成为研究非线性、非高斯动态系统最优估计问题的一个热点和有效方法^[1,6]。该方法实际上是使用蒙特卡罗仿真(Monte-Carlo Simulation)来完成一个递推贝叶斯滤波(Recursive Bayesian Filter),其核心是使用一个具有相应权值的随机样本集合(粒子)来表示需要的后验密度。

统计学中的数论方法,又称准蒙特卡罗(Quasi Monte-Carlo, QMC)方法,其核心思想是使用均匀散布的点来代替使用蒙特卡罗方法生成的点,其中一个重要的理论优势在于:对 N 个采样点的 S 维系统, QMC 方法的误差收敛速度(在概率意义下)为 $O(N^{-1}(\log N)^S)$,而传统的 MC 方法则为 $O(N^{-1/2})$ 。本文将 QMC 方法应用于粒子滤波,试图用多元分布的均方差代表点来代替随机采样点,由于均方差代表点对分布具有更好的代表性,因此可望提高粒子滤波的综合性能。

1 粒子滤波概述

1.1 递推贝叶斯估计

设动态系统的概率状态空间模型可以用以下两个概率密度函数来描述:状态模型 $p(x_k | x_{k-1})$, 测量模型 $p(y_k | x_k)$, 这里 $x_k \in R^{n_x}$ 为 k 时刻系统的状态, $y_k \in R^{n_y}$ 为 k 时刻系统的观测。并假设:系统状态服从一阶马尔可夫过程;观测独立;先验密度(Prior Density)为 $p(x_0)$, 则后验密度(Posterior Density) $p(x_{0:k} | y_{1:k})$ 是序贯估计问题的完整解。

* 收稿日期 2003 - 09 - 09
作者简介 李涛(1973—),男,博士生。

滤波密度(Filtering Density) $p(x_k | y_{1:k})$ 是滤波问题的完整解,它是后验密度的边沿密度。

引入重点密度(Importance Density,又称建议密度 Proposal Density) $q(x_{0:k} | y_{1:k})$,并设样本 $x_{0:k}^i$ 是从重点密度采样获得,即

$$x_k^i \sim q(x_k | x_{k-1}^i, y_k) \quad (1)$$

则根据粒子滤波^[1]理论,有

$$p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(x_k - x_k^i) \quad (2)$$

这里

$$w_k^i \propto p(x_{0:k}^i | y_{1:k}) / q(x_{0:k}^i | y_{1:k}) \quad (3)$$

设重点密度为一阶马尔可夫过程且可表示为递推形式,则式(3)可以简化为

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i) / q(x_k^i | x_{k-1}^i, y_k) \quad (4)$$

通常,需要对上面计算的权值进行归一化,归一化后的权值为

$$w_k^{i*} = w_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i \quad (5)$$

公式(1)~(5)是SIS粒子滤波的基础。根据系统的每一次测量值递推计算样本及权值,构成了SIS粒子滤波算法。

SIS粒子滤波有一个无法避免的退化(Degeneracy)问题^[1]。算法退化程度可以采用有效样本个数进行度量^[1]。减小退化的方法主要包括两个方面:

(1)选择好的重点分布。最常用的是选择先验密度,直观且易于实现,但没有考虑使用新的观测值。已经研究出一些其它更好的方法^[1]。其中,UPF(Unscented Particle Filter)方法使用UKF(Unscented Kalman Filter)产生重点密度,对于非线性模型,UKF方法对高斯随机变量的均值和方差可以精确到3阶水平(泰勒级数展开),而EKF只能到1阶水平^[5]。

(2)加入再采样。再采样的基本思想是消除小权值粒子而集中大权值粒子。其方法是对后验密度的离散近似表示式(2)再进行一次采样,生成一个新的粒子集,该粒子集构成后验密度离散近似的经验分布。已经提出了很多种再采样算法^[1]。再采样在一定程度上可以减小退化,但却带来了粒子耗尽(Sample Impoverishment)问题,已经提出不同的方法来解决这个问题,如:增加马尔可夫链蒙特卡罗(Markov Chain Monte-Carlo, MCMC)移动步骤、粒子的正则(Regularization)再采样^[2]。由于后面需要用到正则再采样,这里仅对其进行说明。

1.2 正则粒子滤波

导致粒子耗尽问题的一个主要原因是在离散分布而不是连续分布上进行再采样。正则再采样在后验分布的连续近似(后验分布的密度估计)上进行再采样,也就是说,在正则再采样中,采样是从近似分布

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i K_h(x_k - x_k^i) \quad (6)$$

中获得。这里 $p(x_k | z_{1:k})$ 称作后验分布的密度估计^[3]。

$$K_h(x) = \frac{1}{h^{n_x}} K\left(\frac{x}{h}\right) \quad (7)$$

是对核密度(Kernel Density) $K(\cdot)$ 进行了重新标度(Rescaled)后的核密度, $h > 0$ 称为核带宽,并且核密度为满足

$$\int x K(x) dx = 0, \quad \int \|x\|^2 K(x) dx < \infty \quad (8)$$

的对称概率密度函数。对核密度 $K(\cdot)$ 及核带宽 h 的选择,要求满足后验密度和相应的正则经验表示之间的平均积分方差(the Mean Integrated Square Error)最小。

为了减少运算量,通常使用高斯核密度,而且不对完整的后验密度进行采样,而是对核函数采样,每

个核函数样本的多少则根据权值的大小决定。

2 多元分布的均方差代表点

定义1 令 $F(x)$ 为 R^s 上的一个 c. d. f. 及 $P = \{x_k, k = 1, \dots, m\}$ 为 R^s 上的一个点集。则对于任意的 x 均有 $x_k \in P$ 使得

$$d(x, x_k) = \min_{1 \leq j \leq n} d(x, x_j) \tag{9}$$

即 x_k 为 x 的代表, 这里 $d(\cdot)$ 为平方距离, 则

$$MSE_f(n, P) = \int d(x, x_k) dF(x) \tag{10}$$

称为 P 关于 $F(x)$ 的均方差。

定义2 令 $F(x)$ 为 R^s 的一个 c. d. f. , 它的 p. d. f. 为 $f(x)$, 则 x 的 n -级量化 $Q = (y, S)$ 包含 R^s 上的一个输出矢量集 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, R^s 上的 n 个互不相交的剖分 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 以及一个由 $Q(x) = y_i (x \in S_i)$ 定义的映射 $Q: R^s \rightarrow S$ 。最优 n -级量化为所有 n -级量化中使均方差

$$MSE(Q) = E \|x - Q(x)\|^2 / S \tag{11}$$

达到最小的 n -级量化。最优 n -级量化所对应的 $\{y_i\}$ 称为 x 的均方差代表点。通过定义球分布和相应的椭球分布, 方开泰、王元等已经证明下述引理。

引理1 设随机向量 y 服从球分布 $y \sim S_s(g)$, x 服从椭球分布且满足

$$x \leftrightarrow \mu + \Sigma^{1/2} y \sim EC_s(\mu, \Sigma, g) \tag{12}$$

若 $\{y_k\}$ 是 $S_s(g)$ 的代表点集, 那么椭球分布 $EC_s(\mu, \Sigma, g)$ 的代表点 $\{x_k\}$ 可以用下式计算

$$x_k = \mu + \Sigma^{1/2} y_k, \quad k = 1, \dots, n \tag{13}$$

其中 $\Sigma^{1/2}$ 为任何满足 $\Sigma = AA'$ 的矩阵 A 。特别地, 若 $n = 1$, 则显然代表点为均值点。

对于一般多元分布, Linde, Buzo 和 Gray 发展了用迭代来求解矢量量化的 LBG 方法^[4], 该方法基于一个训练序列, 从而可以将上述的积分变换为求和的形式。LBG 方法的训练序列基于效率不高的 Monte Carlo 方法, 方开泰、王元将数论方法应用于代表点问题, 提出了 NTLBG 方法^[4], 该方法的训练序列是一个均匀散布的数论网格, 因此具有更高的效率。

设从多元随机向量中可以获得包含 M 个样本的训练序列, 则每个代表点的权值为

$$w_k = \text{代表点为 } x_k \text{ 的训练样本的个数} / \text{样本总数} \tag{14}$$

3 确定性粒子滤波算法

将均方差代表点应用于粒子滤波, 主要需要解决以下三个问题 (1) 初始分布的代表点计算 (2) 重点采样的代表点计算 (3) 正则再采样的代表点计算。

对于初始分布代表点的计算, 由于其粒子数目巨大, 因此可以采用随机样本或者是均方差代表点来作为初始粒子。值得注意的是, 均方差代表点作初始粒子, 其粒子的权值是不等的, 在这一点上和传统的等权值粒子不同。

尽管将采用 EKF 或者 UKF 方法生成的粒子的重点密度近似为高斯分布, 但由于考虑了新的观测值对粒子的影响, 在大多数情况下可以更好地近似粒子的分布。上节也已经说明, 椭球分布的单样本表示, 均值点具有最好的代表性。因此这里使用 EKF 或者 UKF 方法更新粒子的重点密度, 并直接使用重点密度的均值作为新粒子, 而不是使用传统的重点密度的单次随机样本作为新粒子。这样, 粒子权值可计算如下:

由于

$$x_k^i \sim N(\bar{x}_k^i, \bar{P}_k^i)$$

则

$$q(x_k^i | z_{1:k}, y_k) = (2\pi)^{-s/2} (\det \bar{P}_k^i)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_k^i - \bar{x}_k^i)(\bar{P}_k^i)^{-1}(x_k^i - \bar{x}_k^i)\right] \quad (15)$$

由于代表点取在均值点处,则

$$q(x_k^i | z_{1:k}, y_k) = q(\bar{x}_k^i | z_{1:k}, y_k) = (2\pi)^{-s/2} (\det \bar{P}_k^i)^{-1/2} \quad (16)$$

对于正则再采样的代表点计算,可以使用传统的再采样方法,如残差采样等,计算每个粒子“后代”的个数,使用密度估计理论对经验分布建立连续的后验分布近似,然后使用连续后验分布的代表点作为新的粒子,而连续后验分布的代表点则用粒子核密度的代表点来近似。对于均方差代表点,由于其权值不相等,因此需要新的权值分配策略:

设 S 维标准正态分布的均方差代表点序列为 $\{(S, W)_i, i = 1, \dots, M\}$, 这里 $(S, W)_i = \{(s_j, w_j), j = 1, \dots, s\}$ 为核密度函数的 i 点代表点集及其相应的权值。假设再采样后每个粒子的“后代”的个数为 $\{M_i, i = 1, \dots, N\}$, 且满足 $\sum M_i = N$, 这里 N 为粒子总数。则正则再采样后的粒子权值为

$$w_j^* = K \cdot w_j / N \quad (17)$$

算法 均方差代表点的确定性正则再采样算法

循环 $i = 1 : N$,

 循环 $j = 1 : M_i$,

 如果 $M_i \neq 0$

 计算 $x_k^j = \bar{x}_k^i + h_{opt} D_k \varepsilon^j$

$w_k^j = K \cdot \bar{w}^j / N$

$D_k D_k^T = \bar{P}_k^i$

$(\varepsilon^j, \omega^j) = (s_j, w_j)$ 且 $(s_j, w_j) \in (S, W)_{M_i}$

$x_k^{j*} = x_k^j, w_k^{j*} = N^{-1}$

这样,将上述的算法代替传统粒子滤波中的相应部分,就可以得到一种包含很少随机操作的粒子滤波算法,这里称之为确定性粒子滤波算法,而且该算法使用具有非等权值的粒子。

4 仿真

这里采用一个广泛应用的标量模型^[1]对算法进行验证。其状态模型和观测模型为

$$x_k = f_k(x_{k-1}, k) + v_{k-1} \quad (18)$$

$$z_k = x_k^2 / 20 + n_k \quad (19)$$

这里

$$f_k(x_{k-1}, k) = 0.5x_{k-1} + 2.5x_{k-1}(1 + x_{k-1}^2) + 8\cos(1.2k) \quad (20)$$

v_k 和 n_k 为均值为 0, 方差分别为 $Q_k = 10$ 和 $R_k = 0.1$ 的高斯噪声。

粒子滤波退化问题是影响滤波性能的一个关键,有效样本个数可以衡量粒子滤波算法的退化程度。为减小退化而采取的再采样以及诸如 MCMC 移动等措施一方面提高了滤波性能,但同时也大大增加了滤波计算需要的时间。因此本文分别从多次运行(这里取 50 次)的 RMSE、单次运行的运行时间、平均有效样本三个方面比较了以下 3 种算法的性能:

(1) 采用 UKF 滤波产生建议分布,同时使用 MCMC 增加粒子多样性的粒子滤波算法,记做 PF-UKF-MC^[11];

(2) 采用 UKF 滤波产生建议分布,同时使用高斯核密度进行正则再采样的粒子滤波算法,记做 RPF-UKF^[2];

(3) 采用 UKF 滤波产生建议分布,同时使用高斯核密度进行正则再采样的确定性粒子滤波算法。确定性粒子滤波的代表点取 MSE 代表点,即应用 MSE 代表点于初始粒子选择、重点采样以及正则再采样,记做 MSE-RPF-UKF。

这里均采用 200 个粒子。仿真结果见表 1。

表 1 不同粒子滤波算法的性能比较

Tab.1 Performance comparison of PFs

滤波算法	RMSE		平均运行时间	平均有效样本
	mean	var		
PF-UKF-MC	1.8034	0.188	1	22.865
RPF-UKF	1.9127	0.253	0.48	21.749
MSE-RPF-UKF	1.6593	0.190	0.47	23.986

由仿真结果可见:PF-UKF-MC 方法具有中等的滤波性能,但是其运行时间较长;RPF-UKF 方法具有较短的运行时间,但其滤波性能较差;MSE-RPF-UKF 具有更好的滤波性能及较短的计算时间(这里代表点已经预先计算出来)。在有效样本个数上,尽管各个算法的有效样本差别不大,MSE-RPF-UKF 的有效样本依然较多,而传统的 RPF-UKF 算法较少。

5 结论

本文将代表点理论应用于粒子滤波问题,采用更具代表性的均方差代表点来代替随机粒子,提出了一种使用非等权值粒子的确定性的粒子滤波算法。将代表点分别应用于初始粒子生成、重点密度采样及核密度的再采样过程,给出了使用代表点时粒子权值的计算方法。仿真结果表明,确定性粒子滤波算法是有效的,而且其在滤波性能及计算效率方面均有不同程度的提高。

参考文献:

- [1] Arulampalam S, Maskell S, Gordan N, Clapp T. A Tutorial on Particle Filters for Online Non-linear/Non-gaussian Bayesian Tracking[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2002, 50(2):174 - 188.
- [2] Musso C, Oudjane N, Le Grand F. Sequential Monte Carlo Method in Practice[M]. Springer-Verlag, 2001.
- [3] Silverman B W. Density Estimation for Statistics and Data Analysis[M]. London: Chapman and Hall, 1986.
- [4] 方开泰,王元,吴启宏.数论方法在统计中的应用[M].北京:科学出版社,1996.
- [5] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Method for Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Trans. Automatic Control, 2000, 45:477 - 482.
- [6] Crisan D, Doucet A. A Survey of Convergence Results on Particle Filtering Methods for Practitioners[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2002, 50(2):736 - 746.

