

文章编号 :1001 - 2486(2004)02 - 0030 - 05

## 测量 TOA 和 DOA 的单站无源定位跟踪可观测条件\*

李宗华 郭福成 周一宇 孙仲康

(国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘要:单站无源定位跟踪技术中,可观测性分析是一个关键问题,但是由于 TOA 测量方程的非线性程度太高,直接通过计算 Jacobin 矩阵得到的可观测矩阵形式非常复杂,很难得出明确的分析结果。采用新的思路推导了一种 TOA 测量方程的线性化方程,分析了测量 TOA 和 DOA 单站无源定位的可观测条件。最后给出了计算机仿真结果。

关键词:无源定位;可观测性;到达时间;到达方向

中图分类号:TN957 文献标识码:A

## The Observability Conditions of the Single Observer Passive Location and Tracking Based on TOA and DOA Measurements

LI Zong-hua, GUO Fu-cheng, ZHOU Yi-yu, SUN Zhong-kang

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The observability analysis is a key problem of SOPLAT (single observer passive location and tracking). Because of the high nonlinear of TOA measurement equation, the observability matrix which is got by calculating Jacobin matrix is too complex to obtain explicit analysis conclusions. A linearization equation is deduced through a new idea, and the observability conditions of SOPLAT using TOA and DOA measurements are obtained. Finally, a compute simulation result is presented.

Key words: passive location; observability; time of arrival; direction of arrival

对辐射源进行无源定位具有非常重要的作用和意义<sup>[1-3]</sup>。而单站无源定位具有设备简单和系统相对独立等优点,如果能够将单站无源定位技术和雷达技术结合,可以大大提高雷达在电子对抗环境下的战斗力,更具实用价值。无源定位系统模型讨论了观测站利用什么观测量来实现对辐射源无源定位的问题,定位算法则是研究如何利用上述模型完成定位。然而,通过上述定位模型和算法能否实现定位,以及在何种情况下可以定位,涉及到可观测性问题。通常对非线性系统进行可观测性分析是一个难点。

只测角(Bearing-only)定位是最经典的单站无源定位技术,而且单站只测角无源定位的可观测性分析研究较多<sup>[2,3]</sup>。但是对运动辐射源定位时,单站只测角无源定位要求观测站必须机动运动,这严重限制了该技术的应用。文献[4,5]中研究了利用脉冲到达时间(TOA)和脉冲到达方向(DOA)对运动辐射源单站无源定位的模型和算法,可以实现静止单站对运动辐射源的定位,而且有很好的定位性能,但是都没有讨论可观测条件。由于 TOA 测量模型非线性程度远远高于角度测量模型,直接通过计算 Jacobin 矩阵进行线性化非常复杂。

## 1 定位系统模型

假设辐射源辐射等周期(周期  $T_r$  恒定)的脉冲信号,通常只能测量得到目标脉冲重复周期的估计值  $\hat{T}_r$ , 所以将  $\Delta T_k = T_r - \hat{T}_r$  也作为未知量加入状态变量进行估计。观测站每接收  $N$  个脉冲做一次观测,则  $NT_r$  为采样间隔。为了易于表述,本文以二维情况为例讨论,三维条件下可以用同样的方法分析。由于目标距离很远时通常不会有大的机动,所以其状态可以用带有加速度扰动的运动描述。设  $X_k =$

\* 收稿日期:2003-09-10

基金项目:国家部委预研基金项目(41101030112)

作者简介:李宗华(1974—),男,博士生。

$[x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \Delta T_{rk}]^T$  为辐射源第  $k$  时刻状态矢量 则状态方程为 :

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + W_k \quad (1)$$

其中,  $\Phi_{k+1,k} = \begin{bmatrix} I_2 & T I_2 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & I_3 \end{bmatrix}$ ,  $W_k = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} w_{xk} & \frac{T^2}{2} w_{yk} & T w_{xk} & T w_{yk} & 0 \end{bmatrix}^T$  为扰动噪声,  $E[W_k] = 0, E[W_k, W_k] = Q_k \delta_{j,k}, T$  为观测周期。设观测站固定不动,位置为坐标原点 辐射源对观测站的相对状态就是  $X_k$ 。辐射源和观测位置的几何关系如图 1 所示。

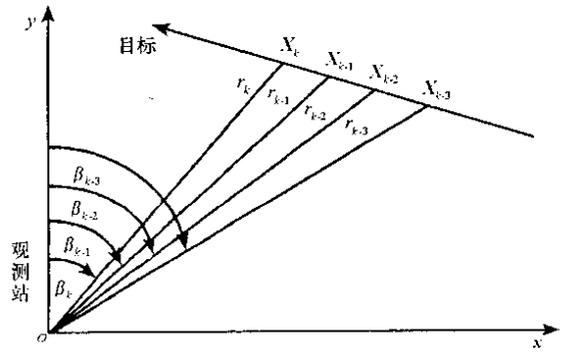


图 1 辐射源和观测位置的几何关系

Fig.1 The geometry relationship between emitter and observer

观测站在时刻  $TOA_{k-1}$  和  $TOA_k$  分别收到  $N$  个脉冲。辐射源运动造成两者间径向距离不断变化,由于传播路径不同,  $TOA_k$  时刻收到  $N$  个脉冲时产生延迟  $(r_k - r_{k-1})/c$  且  $(r_k - r_{k-1})/c \ll NT_r$  ( $NT_r$  是秒级,  $c$  为电磁传播速度)。测量方程为 :

$$\begin{cases} \beta_k = \arctan(\frac{x_k}{y_k}) \\ \Delta TOA_k = TOA_k - TOA_{k-1} = (r_k - r_{k-1})/c + NT_r \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, T = NT_r$ 。

## 2 可观测性分析

### 2.1 非线性系统的可观测性分析

Lee 和 Dum 等人提出如下分析原则<sup>[1]</sup> 对于连续非线性系统,状态方程和输出方程为 :

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t], \quad x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

$$y(t) = h[x(t), t] \quad (4)$$

如果对于凸集  $S \in R^n$  上的所有  $x_0$ , 都有

$$M(x_0) = \int_{t_2}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (5)$$

是正定的 则系统在  $S$  上完全可观测。其中,  $H(t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x}, \Phi(t, t_0)$  是  $\partial f / \partial x$  的转移矩阵。

以上是对于连续系统而言的。如果对连续系统采样离散化后,考虑利用离散观测序列  $Z_{k+N-1} = \{z_k, z_{k+1}, \dots, z_{k+N-1}\}$   $N$  个观测值 来确定系统在  $k$  时刻的状态  $X_k$ ,如果状态转移矩阵  $\Phi_k$  可逆,则和上述非线性可观测定理等价的结论是<sup>[1]</sup> 对于初始集合  $S$  中的  $n$  维矢量  $X_{k_0}^*$ , 记

$$\Gamma_{k+N-1,k} = [H_k \ H_{k+1} \Phi \ \dots \ H_{k+N-1} \Phi^{N-1}]^T \quad (6)$$

为可观测矩阵。其中,  $H_j = \frac{\partial h(X)}{\partial X} \Big|_{X=X_j}$  为 Jacobin 矩阵。

如果存在正整数  $N$  使得  $\Gamma_{k+N-1,k}$  的秩

$$\text{rank } \Gamma_{k+N-1,k} = n \quad (7)$$

则系统在  $S$  上是完全可观测的。

根据研究,单站只测角 (Bearing-only) 可以对运动辐射源无源定位,但是需要观测站运动而且必须是机动运动。实际上,观测站机动只是必要条件,并不是充分条件。也就是说,即使观测站作机动运动,如果不满足机动条件,系统还是不可观测<sup>[1-3]</sup>。大量研究已经表明,只测角单站定位精度低而且收敛速度慢<sup>[6]</sup>。尽管只测角定位对系统要求较低且易于实现,但是由于其存在的缺点,使得引入新的观测值来拓宽单站无源定位应用领域和提高定位性能成为必然选择。

## 2.2 利用时空参数的单站定位可观测性分析

只测量 DOA 无法实现固定单站对运动辐射源无源定位,所以必须增加观测信息。基于时域和空域观测对运动辐射源的二维无源定位,测量参数包括方位角  $\beta$  和到达时间差  $\Delta TOA$ 。分别就辐射源脉冲重复周期  $T_r$  已知和未知两种情况分别进行讨论。通过两种情况分析结果的比较可以进一步说明一些问题。如前所述,进行可观测性分析的关键问题之一是求解可观测矩阵(6)。

### 2.2.1 $T_r$ 已知时的可观测性分析

当  $T_r$  已知时不考虑  $\Delta T_{rk}$ ,取状态变量  $X'_k = [x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k]^T$ 。此时系统状态方程为

$$X'_{k+1} = \Phi'_{k+1,k} X'_k + W'_k \quad (8)$$

$$\text{其中 } \Phi'_{k+1,k} = \begin{bmatrix} I_2 & T I_2 \\ 0_{2 \times 2} & I_2 \end{bmatrix}, W'_k = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} w_{xk} & \frac{T^2}{2} w_{yk} & T w_{xk} & T w_{yk} \end{bmatrix}^T。$$

由图 1 可得:

$$\begin{aligned} r_{k-1} &= \sqrt{(x_k - T\dot{x}_k)^2 + (y_k - T\dot{y}_k)^2} \\ &= r_k \{1 - [2T(x_k\dot{x}_k + y_k\dot{y}_k) - T^2(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2)] / r_k^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

目标距离观测站都很远而其运动速度有限,在观测周期  $T$  为秒级的条件下可知  $\dot{x}_k T \ll r_k$  和  $\dot{y}_k T \ll r_k$ ,忽略(9)式二次项,且由  $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \dots$  可得

$$r_{k-1} \approx \left[ 1 - \frac{T}{r_k} (\dot{x}_k \sin \beta_k + \dot{y}_k \cos \beta_k) \right] \quad (10)$$

令  $\tau_k = \Delta TOA_k - NT_r$ ,将(10)式代入(2)式得:

$$\tau_k \approx \frac{T}{c} [\dot{x}_k \sin \beta_k + \dot{y}_k \cos \beta_k] \triangleq g_{2k}(X'_0) \quad (11)$$

通常情况下,分析可观测性时可以不考虑系统状态噪声,因此由系统状态方程和测量方程可得方位角  $\beta$  的线性形式:

$$0 = x_0 \cos \beta_k + kT \cos \beta_k \dot{x}_k - \sin \beta_k y_0 - kT \sin \beta_k \dot{y}_k \triangleq g_{1k}(X'_0) \quad (12)$$

(11) \ (12) 式联立,并考虑到实际观测中观测量  $\Delta TOA$  和  $\beta$  都含有测量误差,从而得到伪线性测量方程:

$$Z_{mk} = C_k X'_0 + N_k \quad (13)$$

$Z_{mk} = [g_{1mk}(X'_0) \ g_{2mk}(X'_0)]^T$ ,  $N_k = [n_{1k} \ n_{2k}]^T$  是测量误差<sup>6]</sup>。下标  $m$  代表是测量值,假设测量值  $\tau_{mk}$  和  $\beta_{mk}$  分别有误差  $\delta_{\Delta TOA_k} + N \Delta T_{rk}$  和  $\delta \beta_k$ ,这些误差相互独立且都是高斯白噪声。

分别在  $k$  和  $k+1$  两个时刻对目标辐射源进行观测,可以得到测量方程:

$$Z_m = \begin{bmatrix} Z_{mk} \\ Z_{m,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1} \end{bmatrix} X'_0 + \begin{bmatrix} N_k \\ N_{k+1} \end{bmatrix} \triangleq \Gamma_k X'_0 + N \quad (14)$$

$$\text{其中 } \Gamma_k = \begin{bmatrix} C_k \\ C_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_k & -\sin \beta_k & kT \cos \beta_k & -kT \sin \beta_k \\ 0 & 0 & \frac{T \sin \beta_k}{c} & \frac{T \cos \beta_k}{c} \\ \cos \beta_{k+1} & -\sin \beta_{k+1} & (k+1)T \cos \beta_{k+1} & -(k+1)T \sin \beta_{k+1} \\ 0 & 0 & \frac{T \sin \beta_{k+1}}{c} & \frac{T \cos \beta_{k+1}}{c} \end{bmatrix}。$$

当  $Z_m \neq 0$  且  $\text{rank } \Gamma_k = 4$  时,可以由式(14)得到目标辐射源的初始时刻状态  $X'_0$ 。对匀速运动的辐射源来说,知道了初始状态  $X'_0$ ,则目标在任意时刻  $k$  的状态也就决定了。由于  $\Gamma_k$  是  $4 \times 4$  的方阵,所以也就是要求  $\det \Gamma_k \neq 0$ 。经过推导可得:

$$|\det \Gamma_k| = \frac{T^2}{c^2} \sin^2 [(\beta_{k+1} - \beta_k)] \quad (15)$$

① 由式(11)和(12)可以很容易看出,如果  $Z_m = 0$ ,则  $\tau_k = \tau_{k+1} = 0$ ,那么由测量方程式(2)可知,  $r_{k-1}$

$= r_k = r_{k+1}$ , 显然, 当目标到观测站的径向距离始终不变时, 目标是静止不动(在目标为匀速直线运动的条件下)或者绕观测站作圆周运动, 此时系统属于不可观测。

② 如果  $\beta_{k+1} = \beta_k$ , 则  $\sin(\beta_{k+1} - \beta_k) = 0$ , 即辐射源向观测站作径向运动时,  $\det \Gamma_k = 0$ , 系统属于不可观测。

综合①和②可知, 二维条件下固定单站测量 TOA 和 DOA 对匀速运动辐射源定位的可观测性条件是辐射源作非径向匀速运动(且辐射源不能静止不动)。从运动学原理讲, 可观测条件就是目标与观测站之间的  $\dot{r} \neq 0$  和  $\dot{\beta} \neq 0$ , 其中  $\dot{r}$  和  $\dot{\beta}$  分别为径向距离变化率和方位角变化率。

### 2.2.2 $T_r$ 未知时的可观测性分析

此时, 状态变量为  $X_k$ , 状态方程为式(1)。同 2.2.1 节中一样处理, 分别对角度测量方程和到达时间差测量方程进行线性化。不同的是, 此时参数  $T_r$  未知, 所以到达时间差的线性化方程为

$$\tau'_k \approx \frac{\hat{T}_r}{c} (\dot{x}_k \sin \beta_k + \dot{y}_k \cos \beta_k) + N \Delta T_{rk} \triangleq g'_{2k}(X_0) \quad (16)$$

式中,  $\tau_k = \Delta TOA_k - N \hat{T}_r$ ,  $\hat{T}_r$  为  $T_r$  的初始测量估计值,  $\hat{T} = N \hat{T}_r$ 。

方位角的线性化方程为

$$0 \approx x_0 \cos \beta_k + k N \hat{T}_r \cos \beta_k \dot{x}_k - \sin \beta_k y_0 - k N \hat{T}_r \sin \beta_k \dot{y}_k \triangleq g'_{1k}(X_0) \quad (17)$$

由于状态变量  $X_0$  中包含有 5 个变量, 所以至少需要 5 个测量值。分别在  $k, k+1$  和  $k+2$  时刻得到两个方位角测量值和三个到达时间差测量值, 同时考虑到实际观测中观测测量  $\Delta TOA$  和  $\beta$  都含有测量误差, 从而得到测量方程

$$Z'_m = \Gamma'_k X_0 + N' \quad (18)$$

其中,  $Z'_m = [g'_{1k}(X_0^{(1)}) \quad g'_{1k+1}(X_0^{(1)}) \quad g'_{2k}(X_0^{(1)}) \quad g'_{2k+1}(X_0^{(1)}) \quad g'_{2k+2}(X_0^{(1)})]^T$ ,  $\Gamma'_k$  与式(14)中  $\Gamma_k$  的表达式类似,  $N'$  为等效测量误差<sup>[6]</sup>。经过推导可得:

$$\begin{aligned} |\det \Gamma'_k| &= \left| \frac{N \hat{T}_r^2}{c^2} \sin(\beta_k - \beta_{k+1}) \sin(\beta_k - \beta_{k+1}) - \sin(\beta_k - \beta_{k+2}) + \sin(\beta_{k+1} - \beta_{k+2}) \right| \\ &= \left| \frac{N \hat{T}_r^2}{c^2} \sin(\beta_k - \beta_{k+1}) \sin(\beta_k - \beta_{k+1}) A + \sin(\beta_{k+1} - \beta_{k+2}) B \right| \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $A = 1 - \cos(\beta_{k+1} - \beta_{k+2})$ ,  $B = 1 - \cos(\beta_k - \beta_{k+1})$ 。

可观测性分析如下:

①和②与 2.2.1 节的①和②相同。

③ 一般观测站距离辐射源目标都很远, 当目标直线运动时, 其轨迹完全可以在图 1 所示的直角坐标系第一、二象限内描述, 再由  $\beta_k = \arctan \left[ \frac{x_0 + (t_k - t_0)\dot{x}_0}{y_0 + (t_k - t_0)\dot{y}_0} \right]$ , 可知  $\beta_k$  取值为  $(-\pi/2, \pi/2)$ , 在此范围内  $\arctan$  是单调函数。  $\beta_k$  对时间求导数可得:

$$\begin{aligned} f_k \triangleq \frac{\partial \beta_k}{\partial t_k} &= \left\{ 1 + \left[ \frac{x_0 + (t_k - t_0)\dot{x}_0}{y_0 + (t_k - t_0)\dot{y}_0} \right]^2 \right\}^{-1} \left\{ \frac{\dot{x}_0}{y_0 + (t_k - t_0)\dot{y}_0} - \frac{[x_0 + (t_k - t_0)\dot{x}_0]\dot{y}_0}{[y_0 + (t_k - t_0)\dot{y}_0]^2} \right\} \\ &= \frac{\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0}{[y_0 + (t_k - t_0)\dot{y}_0]^2 + [x_0 + (t_k - t_0)\dot{x}_0]^2} \end{aligned} \quad (20)$$

显然,  $f_k$  中分母为正数(不会出现目标与观测站在同一点的情况), 而分子为常数。

(1) 如果  $f_k = 0$  (即分子为零), 则很容易推得辐射源固定不动(即  $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ )或辐射源向观测站作径向运动, 这两种情况都属于不可观测;

(2)  $f_k$  恒为正或恒为负, 有  $\beta_{k-1} < \beta_k < \beta_{k+1}$  或  $\beta_{k-1} > \beta_k > \beta_{k+1}$ 。同时易知,  $A > 0$  且  $B > 0$ , 所以,  $\sin(\beta_k - \beta_{k+1}) \neq 0$  且  $[\sin(\beta_k - \beta_{k+1})A + \sin(\beta_{k+1} - \beta_{k+2})B] \neq 0$ , 即  $|\det \Gamma'_k| \neq 0$ 。综合①、②和③可知, 基于时空变量的二维定位中,  $T_r$  已知和未知两种情况下具有相同的可观测性条件。不同的是,  $T_r$  未知时只要相应地增加观测次数就可以了。实际上, 由于  $T_r$  是辐射源的固有参数而与其运动形式无关, 只要观测次数足够,  $T_r$  就不会影响可观测性。

### 3 可观测性仿真

为了验证固定观测站对运动辐射源无源定位的可观测性分析,场景如图1所示。实验条件:辐射源初始位置为  $[x_0 \ y_0]^T = [120\text{km} \ 60\text{km}]^T$ ,速度单位为  $\text{m/s}$ ,速度扰动噪声方差为  $\sigma_{wx} = \sigma_{wy} = 1\text{m/s}^2$ ,根据辐射源速度不同做四次仿真。目标信号重复周期为  $T_r = 1\text{ms}$ ,  $N = 1000$ 。观测站位于坐标原点,测量精度为  $\sigma_\beta = 5\text{mrad}$ ,  $\sigma_{TOA} = 12\text{ns}$ 。定位采用经典的EKF(扩展卡尔曼滤波)滤波算法<sup>[6]</sup>,仿真结果取100次Monte-Carlo。仿真结果用相对误差

$$r_k = \frac{\sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^2 + (y_k - \hat{y}_k)^2 + (z_k - \hat{z}_k)^2}}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}}$$

其中,  $[x_k \ y_k \ z_k]^T$  和  $[\hat{x}_k \ \hat{y}_k \ \hat{z}_k]^T$  分别为  $k$  时刻目标位置的真实值和定位跟踪估计值。

从图2结果可以看出,Line4曲线说明目标向观测站作径向运动时,定位曲线无法收敛,系统不可观测;从Line3到Line1说明,随着目标运动方向与观测站到目标视线方向间夹角的增大,定位曲线收敛逐渐加快,而且定位精度提高。所以,在实际运用中对观测站位置的选择非常重要,需要根据具体情况而定。

### 4 结论

非线性系统的可观测性分析是一个重要问题,决定了系统是否可解以及在何种条件下有解,该问题的关键是求解可观测矩阵。由于TOA测量方程的非线性程度太高,直接通过计算Jacobin矩阵得到的可观测矩阵形式非常复杂,很难得出明确的分析结果。以前的文献都是讨论了测量TOA和DOA单站无源定位模型和算法,但是没有进行可观测分析<sup>[4,5]</sup>。本文采用新的思路推导了一种TOA测量方程的线性化方程,分析了在脉冲重复频率已知和未知两种情况下测量TOA和DOA单站无源定位可观测条件。推导的线性化方程可以用于研究新的定位跟踪算法<sup>[6]</sup>。

### 参考文献:

- [1] 孙仲康,周一宇,何黎星. 单多基地有源无源定位技术[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [2] Nardone S C, Aidala V J. Observability Criteria for Bearing-only Target Motion Analysis[J]. IEEE Tran. on Aerospace and Elec. System, 1981, 17(2): 162-166.
- [3] Song T L. Observability of Target Tracking with Bearing-only Measurements[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic System, 1996, 33(4): 1468-1472.
- [4] 杨莘元,郑思海. 基于运动辐射体TOA和DOA测量的单站被动定位算法[J]. 电子学报, 1996, 24(12): 66-69.
- [5] 王杰贵,罗景青,等. 固定单站对机动目标无源定位IMM算法[J]. 信号处理, 2002, 18(2): 137-140.
- [6] 李宗华,冯道旺,周一宇,孙仲康. 一种固定单站对运动辐射源的无源定位跟踪算法[J]. 国防科技大学学报, 2003, 25(4): 27-30.

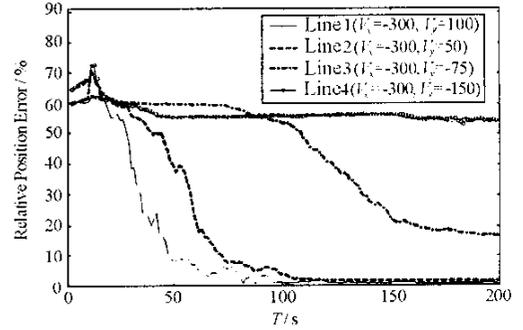


图2 定位可观测性仿真

Fig.2 Simulation of location observability



