

一种三自由度模型姿态调整机构的正反解分析*

董培涛, 吴学忠, 程忠宇

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 提出了一种三自由度模型姿态调整机构。采用回转矩阵方法分析了模型姿态与输入角度的关系, 给出了机构的正解, 结果表明模型姿态的三个自由度之间存在耦合关系, 且表现出非线性。利用机构的运动特点, 采用几何方法给出了反解, 避免了数值解法的缺陷。

关键词: 姿态调整机构; 模型支撑系统; 运动学分析

中图分类号: TH112 文献标识码: A

Kinematics Analysis of a Three-DOF Attitude Adjustment Mechanism

DONG Pei-tao, WU Xue-zhong, CHENG Zhong-yu

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A three degree-of-freedom attitude adjustment mechanism is proposed. Direct kinematics was studied and the results indicate that the relationship between the angles the supporting system rotates and the attitude (α, β, γ) of the model is nonlinear and coupled. Based on the specific structure of the supporting system, geometric method was adopted to obtain the inverse solution.

Key words: attitude-adjusting system; model supporting system; kinematics analysis

在某些试验场合, 需要改变模型的姿态。模型大多采用尾部支撑方式, 以减小支架对模型的影响。同时为了在一次试验中测试各种角度的试验数据, 往往需要能够连续调整姿态的机构以降低试验成本。如图 1 的机构就是其中的一种形式, 它能够实现模型姿态的连续调节。俯仰机构、偏转机构、滚转机构三个转动轴交于一点, 但不是两两正交, 因此会导致模型姿态各角度之间产生耦合。从机构控制的角度来考虑, 对其正解及反解分析就显得尤为必要。

当已知俯仰机构、偏转机构和滚转机构的转角时, 利用一般的回转矩阵方法^[1-3]可以求出模型姿态所对应的各种角度, 这是正解问题。而实际应用中, 由于运动控制的需要, 碰到的是与此相反的问题, 即已知模型姿态, 求俯仰机构、偏转机构和滚转机构的转角, 这是反解问题。

对于较为复杂的串联机构, 反解问题要比正解问题难解决, 一般采用数值解法, 但数值解法受迭代时间、收敛性及计算初值等因素的影响, 应用起来不是很方便。对于本文所提出的机构, 在仔细分析其结构和运动特点的基础上, 采用几何方法直观给出了位置反解, 巧妙解决了这一问题。

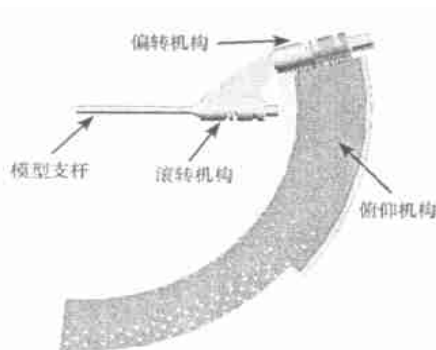


图 1 三自由度姿态调整机构

Fig. 1 Three DOF attitude adjustment mechanism

* 收稿日期: 2004- 01- 12

基金项目: 国家自然科学基金- 香港青年学者合作研究基金资助项目 (50029501)

作者简介: 董培涛 (1979-), 男, 博士生。

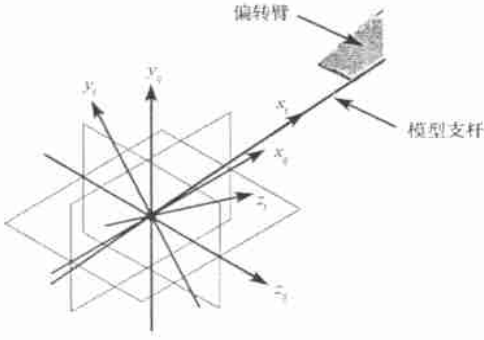


图2 机构坐标系定义

Fig. 2 Definition of coordinate system

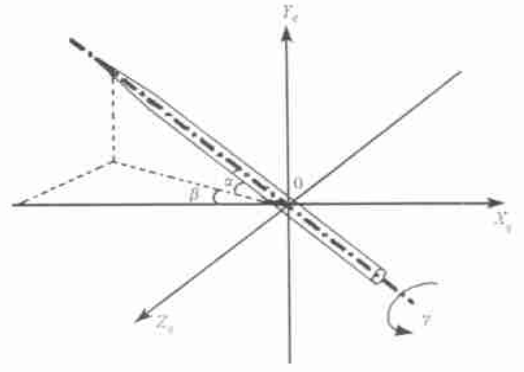


图3 模型姿态的定义

Fig. 3 Definition of model attitude

1 位置正解

为了说明攻角机构输入输出角度的关系, 在图2中建立了攻角机构的坐标系。定义气流坐标系为 $ox_qy_qz_q$ (以下简称 S_q), 其中 o 点为俯仰机构、偏转机构和滚转机构三转轴的交点, oz_q 轴为俯仰机构的轴线, ox_q 轴在水平面内且垂直于 oz_q 轴, oy_q 轴由右手法则确定。随体坐标系 $ox_t y_t z_t$ (以下简称 S_t) 固连在模型上, 当模型处于零攻角、零偏航、零滚转状态时, 随体坐标系 $ox_t y_t z_t$ 与气流坐标系 $ox_q y_q z_q$ 重合。图3表示模型姿态的各角度的定义, 其中 α 为模型轴线与 $ox_q z_q$ 面的夹角, β 为模型轴线在 $ox_q z_q$ 面内的投影与 ox_q 轴的夹角, γ 为模型纵向对称面绕 ox_t 轴所在铅垂面旋转的角度。攻角机构输入角度分别指俯仰、偏转、滚转机构相对各自初态的转动角度 ϕ 、 η 、 φ 。随体坐标系 S_t 可以看成由气流坐标系 S_q 经过一系列的变换得到:

(1) 俯仰机构动作: 绕 z_q 轴旋转角度 ϕ , 其坐标变换矩阵设为 Z_ϕ 。

(2) 偏转机构动作: 绕 x_t 轴旋转角度 η , 其坐标变换矩阵设为 X_η 。

(3) 形成机构(偏转机构和滚转机构转轴之间的 15° 夹角): 绕 z_t 轴旋转 $\theta = 15^\circ$, 其坐标变换矩阵设为 Z_θ 。

(4) 滚转机构动作: 绕 x_t 轴旋转滚转机构转角 φ , 其坐标变换矩阵设为 X_φ 。

$$Z_\phi = \begin{Bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad X_\eta = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & -\sin \eta \\ 0 & \sin \eta & \cos \eta \end{Bmatrix}$$

$$Z_\theta = \begin{Bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \quad X_\varphi = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

从 S_q 到 S_t 的坐标变换矩阵:

$$P = Z_\phi X_\eta Z_\theta X_\varphi \quad (1)$$

最终姿态角的形成可以看成是 S_t 上的矢量 $(1, 0, 0)$ 在 S_q 下所形成的姿态角:

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = Z_\phi X_\eta Z_\theta X_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \eta \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \cos \eta \sin \theta \\ \sin \eta \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

同时 S_t 上的矢量 $(1, 0, 0)$ 在 S_q 下又可表示为:

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

由式(2)、(3)可以得出:

$$\beta = \arctan \left(\frac{\sin \eta \sin \theta}{\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \cos \eta \sin \theta} \right) \quad (4)$$

$$\alpha = \arcsin(\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \cos \eta \sin \theta) \quad (5)$$

γ 为气流坐标系绕 Y 轴旋转 β 角, 再绕新坐标系 Z 轴旋转 α 角后所得坐标系下向量 $A(0, 1, 0)$ 与“随体坐标系”下向量 $B(0, 1, 0)$ 之间的夹角。因此有:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= [Y_\beta Z_\alpha(0, 1, 0)^T]^T Z_\phi X_\eta Z_\theta X_\varphi(0, 1, 0)^T \\ &= (0, 1, 0) Z_\alpha Y_\beta Z_\phi X_\eta Z_\theta X_\varphi(0, 1, 0)^T \end{aligned} \quad (6)$$

考虑到滚转机构是独立的, 即滚转机构的运动不会对攻角、偏航角产生影响, 因此由攻角机构和偏转机构引入的滚转角可单独计算, 再与滚转机构的转角求代数和, 得到模型的滚转角, 这样可以使计算简化。设滚转机构的转角为 γ_φ , 由攻角机构和偏转机构引入的滚转角为 $\gamma_{\eta 1}$, 则

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta 1} &= \arccos[(0, 1, 0) Z_\alpha Y_\beta Z_\phi X_\eta Z_\theta(0, 1, 0)^T] \\ &= \arccos(\sin \alpha \cos \beta (\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta \cos \eta) \\ &\quad - \cos \alpha (\cos \phi \cos \theta \cos \eta - \sin \phi \sin \theta) + \sin \alpha \sin \beta \cos \theta \sin \eta) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\gamma = \gamma_\varphi + \gamma_{\eta 1} \quad (8)$$

2 位置反解的几何算法

现有的机构运动学逆问题的求解方法主要分两大类: 封闭式解法和数值解法。数值解法较复杂, 算法的有效性受计算效率、收敛性、计算初值的选择等因素的影响, 应用起来不是很方便。封闭式解法是指基于解析表达式或不超过 4 阶的多项式方程的解法, 只要将已知参数代入, 即可获得所需的解, 这种方法一般又分为代数法和几何法。

对于双转子攻角机构, 利用公式(4)、(5)可以较方便地求得正解。由于转角 ϕ 、 η 的耦合性, 很难再从公式(4)、(5)中求出反解的封闭形式, 但利用其特殊的结构和运动特点, 可以采用几何法给出其位置反解。

如前所述, 滚转机构的运动是可以分离出来的, 这里不需讨论, 只分析俯仰机构和偏转机构的解耦问题。

2.1 偏转机构的转角

由于俯仰机构的转轴为 z_q 轴, 因此可以得出如下结论: 在模型轴线上取一固定点, 当偏转机构固定时, 不论俯仰机构如何转动, 选取的点到 $x_q o y_q$ 平面的距离为一恒定值, 即这一距离仅与偏转机构的运动有关。根据这一结论, 就可以把偏转机构的运动分离出来。

如图 4 所示, 在模型轴线上取一固定点 A_1 , OA_1 的距离为单位长度, 攻角为 α , 偏航角为 β , 则 A_1 点至 $x_q o y_q$ 平面的距离为

$$B_1 C_1 = \cos \alpha \sin \beta \quad (9)$$

从偏转机构的转动考虑, 在图 5 的天平支杆上取一固定点 A_2 (与 A_1 点关于原点对称), 则 A_2 点至 $x_q o y_q$ 平面的距离为

$$A_2 C_2 = \sin \theta \sin \eta \quad (10)$$

显然, 以上两式相等, 从而可求得:

$$\eta = \arcsin \left(\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \theta} \right) \quad (11)$$

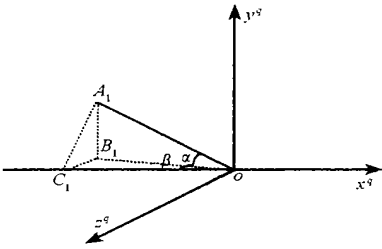


图4 模型轴线上固定点 A_1 到 x_qoy_q 平面的距离
Fig. 4 Distance from on the model axis lead to x_qoy_q

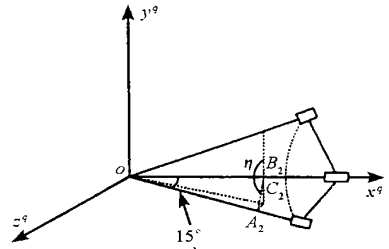


图5 天平支杆上固定点 A_2 到 x_qoy_q 平面的距离
Fig. 5 Distance from on the supporting rod to x_qoy_q

实际存在关于 $x_q\alpha_q$ 对称的两个位置均满足距离相等条件, 即位置反解是不惟一的。

2.2 俯仰机构的转角

可以这样考虑: 先旋转偏转机构到给定角度, 再旋转俯仰机构。将俯仰机构转动后和转动前的模型支杆分别向 x_qoy_q 平面投影, 两个投影之间的角度差就是俯仰机构的转角。

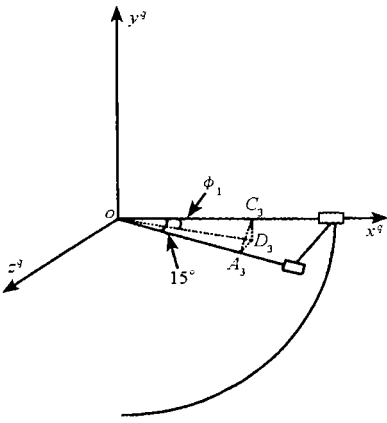


图6 俯仰机构转动前向 x_qoy_q 平面投影
Fig. 6 Projection to x_qoy_q before pitch motion

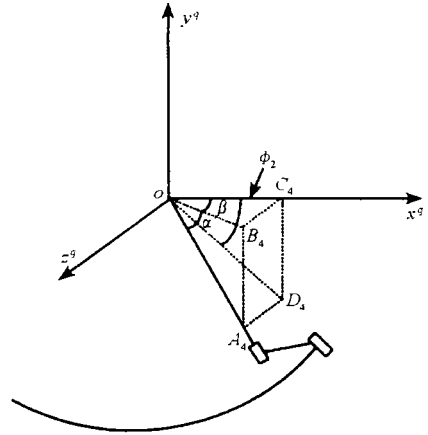


图7 俯仰机构转动后向 x_qoy_q 平面投影
Fig. 7 Projection to x_qoy_q after pitch motion

如图6所示, 俯仰机构转动前, 在天平支杆上取一点 A_3 , 并向 x_qoy_q 投影, 投影与 α_q 轴之间的夹角为

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{OC_3}{OD_3}\right) = \arccos\left(\frac{\cos 15^\circ}{\sqrt{1 - (\cos \alpha \sin \beta)^2}}\right) \quad (12)$$

如图7所示, 俯仰机构转动后, 在天平支杆上取一点 A_4 , 并向 x_qoy_q 投影, 投影与 α_q 轴之间的夹角为

$$\phi_2 = \arcsin\left(\frac{C_4D_4}{OD_4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (\cos \alpha \sin \beta)^2}}\right) \quad (13)$$

则俯仰机构的转角为:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (14)$$

同样, 由于偏转机构位置的不惟一性, 所以俯仰机构位置反解也是不惟一的。

2.3 算法的验证

为验证反解算法的正确性, 先给定四组模型姿态的角度(表1), 利用反解算法求出俯仰机构和偏转机构对应的转角(表2), 再利用正解算法求各组反解所对应的模型姿态(表3)。

表1 模型姿态
Tab.1 Model attitude

攻角($^{\circ}$)	0	0	15	15
偏航角($^{\circ}$)	0	15	0	15

表2 俯仰机构和偏转机构对应的转角
Tab.2 Rotation angel of pitch and yaw

俯仰机构转角($^{\circ}$)	- 15.0000	15.0000	0.0000	0.0000	0.0000	30.0000	11.5370	19.4712
偏转机构转角($^{\circ}$)	0	180.0000	90.0000	90.0000	0.0000	180.0000	75.0000	105.0000

表2中,对应模型姿态为(0° , 15°)的两组位置反解相同。反解(30.0000° , 180.0000°)和(19.4712° , 105.0000°)中,由于俯仰机构转角超出了调整范围,是不可行解。

表3 利用反解所求的模型姿态
Tab.3 Model attitude from inverse solution

攻角($^{\circ}$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	15.0000	15.0000
偏航角($^{\circ}$)	0.0000	0.0000	15.0000	15.0000	0.0000	15.0000

对比表1和表3可知反解算法是正确的。

3 结束语

分析了双转子攻角机构模型姿态与输入角度之间的关系,指出其耦合性与非线性。利用 γ 机构的独立,简化了问题的求解。推导出模型姿态与输入角度之间的方程,利用回转矩阵法求出正解。在分析机构的特殊结构及运动特点的基础上,利用几何算法给出了反解,避免了数值算法的缺陷。计算结果表明,反解算法是正确的。

参考文献:

- [1] 孙伯鲁. 空间角度自动计算[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.
- [2] 张启先. 空间机构的分析与综合[M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.
- [3] 牧野洋, 谢存禧, 郑时雄. 空间机构及机器人机构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.