文章编号:1001－2486(2004)02－0094－06

大子直积与其系数环*

冯良贵[1],郝志峰[2]

(1. 国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073;2. 华南理工大学应用数学系,广东 广州 510063)

摘　要:设 ℵ 为无限正则基数,$\mathscr{F}$为集合 I 的滤子,通过模的 ℵ 积和 $\mathscr{F}$－积给出了其系数环 R 相关结构的特征刻画。作为应用,一些已有的结果得到了推广。

关键词:平坦性;无限正则基数;完全环;ℵ－完备滤子

中图分类号:O153.3　　**文献标识码**:A

Large Subdirect Product and Its Coeffeicient Ring

FENG Liang-gui[1],HAO Zhi-feng[2]

(1. College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Department of Applied Mathematics, Huanan Univ. of Science and Technology, Guangzhou 510063, China)

Abstract:Let ℵ be an infinite regular cardinal number, $\mathscr{F}$ be a filter of a set I. The characterizations of the related structure on coeffeicient ring R has been given by ℵ-product and $\mathscr{F}$-product of modules. As applications, some known results has been generalized.

Key words:flatness;infinite regular cardinal number;perfect ring, ℵ-conplete filter

R 模的直和与直积通常与关于 R－模的某个性质 P 的保持问题密切相关,即什么时候满足性质 P 的 R 模的直和(或直积)仍保持性质 P?两个经典的结果是:(1)左内射模的直和仍内射等价于 R 为左 Noether 环[1];(2)左投射模的直积仍投射等价于 R 为右凝聚左完全环[2]。作为直积和直和的推广,Dauns 于 1987 年在文献[3]中引入了模的 ℵ－积的概念,Loustaunau 于 1990 年在文献[4]中又给出了模的 $\mathscr{F}$－积的定义,这里 ℵ 表无限基数,$\mathscr{F}$表集合的滤子。给定 R 模族 $\{M_i, i\in I\}$,让 ℵ 为一个无限基数,$\mathscr{F}$为 I 的一个滤子,于是任取 $x=(x_i)_{i\in I}\in\prod_I M_i$,有 I 的子集:$supp\ x=\{\alpha\in I : x_\alpha\neq 0\}$. 按文献[3],$R$ 模族 $\{M_i, i\in I\}$ 的 ℵ－积 $\prod_I^{\aleph} M_i$,被定义为 $\{x\in\prod_I M_i \mid |supp\ x|<\aleph\}$,这里 $|supp\ x|$ 表支集 $supp\ x$ 的势。相应地,按文献[4],R 模族 $\{M_i, i\in I\}$ 的 $\mathscr{F}$－积 $\prod_I^{\mathscr{F}} M_i$,则被定义为 $\{x\in\prod_I M_i \mid I\setminus supp\ x\in\mathscr{F}\}$. 显然,模族 $\{M_i, i\in I\}$ 的 ℵ－积与 $\mathscr{F}$－积均是 $\prod_I M_i$ 的子模。一般地,把模的 ℵ－积及 $\mathscr{F}$－积统称为模的大子直积。

通篇中,环均指含单位元 $1\neq 0$ 结合环,模均是酉的。对一个无限基数 ℵ,左 R 模 M 称为 ℵ－有限生成的是指:若 $\forall J\subseteq M$ 满足 $|J|<\aleph$,则必 $\exists M$ 的 $f.g.$ 子模 N 使得 $J\subseteq N$. 进一步,环 R 称为是 ℵ－左完全环是指:R 对 ℵ－有限生成右理想有 DCC. 若 Q 为平坦左 R 模,定义 T_Q 为其挠类:$\{U \mid U$ 为右模满足 $U\otimes_R Q=0\}$。任给定左 R 模 N_1, N_1 的子模 N_2 称为是 N_1 的纯子模是指:$N_2\cap IN_1=IN_2$, $\forall R$ 的右理想 I 均成立. 任给集合 I 的滤子 $\mathscr{F}$,令 $K=sup\{|I\setminus F| : F\in\mathscr{F}\}$,规定

$$\begin{cases} supp(\mathscr{F})=K, & \text{当 } K \text{ 不能达到时} \\ K^+, & \text{当 } K \text{ 能够达到时}\end{cases}$$

关于左完全环的有关性质,可参看文献[5]中的第 6 节;而关于后继数及极限序数的有关性质,则可参看文献[6]。

1　ℵ－积与其系数环的完全性

设 M 为一个右 R 模,ℵ 为一个无限基数,Q 为一个平坦左 R 模,作为有限生成模的推广,文[7]和[8]

* 收稿日期:2003－09－18

基金项目:数学天元基金资助项目(A0324660);国防科技大学预研基金资助项目(JC－02－008)

作者简介:冯良贵(1968—),男,教授,博士。

分别引进了$(\aleph,Q)$－有限生成模的定义。按文[7],M称为一个$(\aleph,Q)$－有限生成模是指 若对$\forall$子集$T \subseteq M \underset{R}{\otimes} Q$满足$|T| < \aleph$,总存在$N$为$M$的有限生成子模,使得$T \subseteq N \underset{R}{\otimes} Q$.而按文[8],$M$称为一个$(\aleph,Q)$－有限生成模是指 若对$\forall$集合$S \subseteq M$满足$|S| < \aleph$,总$\exists M$的有限生成子模$N$,使得$\langle S\rangle \underset{R}{\otimes} Q \subseteq N \underset{R}{\otimes} Q$.首先指出这两个定义实际上是等价的,因而文[7]与[8]中$(\aleph,Q)$－有限表现模的概念也是等价的。

引理1.1 设M为一个右R模,Q为一个平坦左R模,$\aleph$为无限基数,则有以下三条等价:

(1)$\forall$集合$T \subseteq M \underset{R}{\otimes} Q$满足$|T| < \aleph$,总有$f.g.$子模$N \leqslant M$使得$T \subseteq N \underset{R}{\otimes} Q$;

(2)$\forall$集合$S \subseteq M$满足$|S| < \aleph$,总有$f.g.$子模$N \leqslant M$使得$\langle S\rangle \underset{R}{\otimes} T \subseteq N \underset{R}{\otimes} Q$;

(3)任意指标集I,自然映射ϕ:$M \underset{R}{\otimes} \prod_{i\in I}^{\aleph} Q \to \prod_{i\in I}^{\aleph}(M \underset{R}{\otimes} Q)$为满射。

证明 由文[7]的引理1.4知,(1)$\Leftrightarrow$(3),而由文[8]的命题2.3又知,(2)$\Leftrightarrow$(3),因此引理1.1获证。

引理1.2 设R为环,N为一个左R模,则有M平坦$\Leftrightarrow Tor_1(R/I,M) = 0$,对$\forall f.g.$右理想$I$.

文[10]中引进了n－平坦模的概念,并利用n－平坦模的直积给出了n－凝聚环的特征刻画。按文[10],一个左R模Q称为n－平坦的,如果$Tor_n^R(N,Q) = 0$对所有n表现的右R模N成立。因此,上述的引理1.2表明:1－平坦模即为平坦模,应用引理1.1及引理1.2,可概括右$(\aleph,Q)$－凝聚环的等价特征如下:

命题1.1 设Q为一个平坦左R模,$\aleph$为一个无限基数,则有以下几条等价。

(1)R为一个右$(\aleph,Q)$－凝聚环,即R的一切$f.g.$右理想均是$(\aleph,Q)$－有限表现的;

(2)$\prod_{I}^{\aleph} Q$平坦,对任何指标集I;

(3)任意右模正合列:$F_2 \to F_1 \to M \to 0$(其中F_2,F_1均$f.g.$自由)均$\exists(\aleph,Q)$－有限生成模K,使得:$0 \to K \to F_2 \to F_1 \to M \to 0$正合。

(4)$Tor_1^R(N,\prod_{i\in I}^{\aleph} Q_i) \simeq \prod_{i\in I}^{\aleph} Tor_1^R(N,Q_i)$对任意有限表现模$N$和任意左$R$－模族$Q_i \in Gen(Q)$.

(5)自由右模的一切$f.g.$子模均为$(\aleph,Q)$－有限表现的;

(6)投射右模的一切$f.g.$子模均为$(\aleph,Q)$－有限表现的;

(7)$\forall a \in R$,$\forall R$的$f.g.$右理想I,$(I:a)$为$(\aleph,Q)$－有限生成右理想;

(8)R的任意两个$f.g.$右理想之交为$(\aleph,Q)$－有限生成右理想且对$\forall a \in R$,$(0:a)$为$(\aleph,Q)$－有限生成右理想;

(9)每个$(\aleph,Q)$－有限表现模的任意$f.g.$子模均是$(\aleph,Q)$－有限表现的。

证明 由文[7]定理1.12及引理1.2知:(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4)

(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(6)$\Leftrightarrow$(9)见文[8]定理2.7。

(6)$\Leftrightarrow$(5)显然,(5)$\Leftrightarrow$(1)显然。

(7)$\Leftrightarrow$(8)$\Leftrightarrow$(1),见文[8]定理2.10。

固定一个平坦左R－模Q,注意到上述的命题1.1给出的恰是:Q为$\Pi^{\aleph}$－平坦情形的等价刻画,由此引出一个有趣的问题是 对于一个固定的平坦左R模Q,Q为$\Pi^{\aleph}$－投射的等价刻画又是什么?为此先引入如下定义。

定义1.1 $\aleph$为无限基数,Q为平坦左R模。环R称为$(\aleph,Q)$左完全环,如果R的$(\aleph,Q)$－有限生成右理想满足降链条件(DCC)。

关于$(\aleph,Q)$左完全环,显然有下列基本事实:①$\aleph = |\mathbf{N}| = \aleph_0$时,对任何左平坦模$Q$,$(\aleph,Q)$左完全环即为右阿丁环。②任一无限基数$\aleph$,任一平坦左$R$模,$(\aleph,Q)$左完全环必为左完全环。③$\aleph < \aleph'$时,$(\aleph,Q)$左完全环必为$(\aleph',Q)$左完全。

命题1.2 设Q为左平坦忠实R－模,无限基数$\aleph > |Q|$,则有以下三条等价:

(1)R为$(\aleph,Q)$左完全环;

(2)R为左完全环;

(3) R 为 $\aleph$ - 左完全环。

证明 首先由文[14]知，Q 为左忠实平坦 R - 模 $\Leftrightarrow Q$ 左平坦且 $T_Q = 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2)，由定义即可。

(2) $\Rightarrow$ (1)，Q 为左平坦 R 模，故对 $\forall I \underset{右}{\triangle} R$，$I \underset{R}{\otimes} Q \simeq IQ \subseteq RQ = Q$. 因此总有 $|I \otimes Q| \leqslant |Q| < \aleph$. 现假设 I 为 R 的任一 $(\aleph, Q)$ 有限生成右理想，证明 I 必为 $f.g.$ 右理想，从而由 Björk 的结果知 (2) $\Rightarrow$ (1) 获证。

因 $|I \underset{R}{\otimes} Q| < \aleph$，故由 $(\aleph, Q)$ - 有限生成模的定义知：$\exists N$ 为 I 的有限生成子模，使得 $I \otimes Q \subseteq N \otimes Q$，注意到 $N \otimes Q \subseteq I \otimes Q$，因此有 $N \otimes Q = I \otimes Q$，考虑正合列：$0 \to N \to I \to I/N \to 0$，得正合列：$0 \to N \otimes Q \to I \otimes Q \to I/N \otimes Q \to 0$，于是，$I/N \otimes Q = 0$，i.e.，$I/N \in T_Q$。

由条件知：$T_Q = 0$，故 $I = N$.

由引理 1.1 中的(2)知 $\aleph$ - 有限生成模必为 $(\aleph, Q)$ - 有限生成模，故有：(1) $\Rightarrow$ (3) 真。另外，有限生成模又必为 $\aleph$ - 有限生成模，故有 (3) $\Rightarrow$ (2) 也真。

命题 1.3 设 Q 为平坦左 R 模，I 为 $(\aleph, Q)$ 有限生成右理想，T 为任一指标集，$\aleph$ 为无限基数，则有：

$$I\left(\prod_T^{\aleph} Q\right) = \prod_T^{\aleph} IQ$$

证明 显见 $I\prod_T^{\aleph} Q \subseteq \prod_T^{\aleph} IQ$.

$\forall x \in \prod_T^{\aleph} IQ$，$x = (x_\alpha)_{\alpha \in T}$，则有当 $\alpha \in \mathrm{supp}x = \{\alpha \in T \mid x_\alpha \neq 0\}$ 时，$x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} r_{\alpha i} q_{\alpha i}$，其中 $r_{\alpha i} \in I$，$q_{\alpha i} \in Q$. 于是：$|\{r_{\alpha i} \mid \alpha \in \mathrm{supp}x, i = 1, \cdots, n_\alpha\}| < \aleph$. 由于 I 为 $(\aleph, Q)$ 有限生成的，故 $\exists I$ 的有限生成 R 子模 $r_1 R + \cdots + r_k R$ 使得：$\langle\{r_{\alpha i} \mid \alpha \in \mathrm{supp}x, i = 1, \cdots, n_\alpha\}\rangle \otimes Q \subseteq (r_1 R + \cdots + r_k R) \otimes Q$. 注意到 Q 为左平坦模，因而映射 $\phi: I \underset{R}{\otimes} Q \to IQ$，$\sum x_i \otimes q_i \to \sum x_i q_i$ 为同构，由 $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} r_{\alpha i} q_{\alpha i}$ 得 $x_\alpha = \phi\left(\sum_{i=1}^{n_\alpha} r_{\alpha i} \otimes q_{\alpha i}\right) = \phi\left(r_1 \otimes q_{\alpha_1}^* + \cdots + r_k \otimes q_{\alpha_k}^*\right)$，现定义 $m_{\alpha 1} = \begin{cases} q_{\alpha_1}^* & \alpha \in \mathrm{supp}x \\ 0 & \alpha \notin \mathrm{supp}x \end{cases}$，$\cdots$，$m_{\alpha k} = \begin{cases} q_{\alpha_k}^* & \alpha \in \mathrm{supp}x \\ 0 & \alpha \notin \mathrm{supp}x \end{cases}$.

于是点 $(m_{\alpha 1})_{\alpha \in T}, \cdots, (m_{\alpha k})_{\alpha \in T}$ 均 $\in \prod_T^{\aleph} Q$，且 $x = (x_\alpha)_{\alpha \in T} = r_1 (m_{\alpha 1})_{\alpha \in T} + \cdots + r_k (m_{\alpha k})_{\alpha \in T} \in I\prod_T^{\aleph} Q$.

引理 1.3 R 为环，Q 左忠实平坦 R 模。J 为一指标集，$|J| > |R|$. $\aleph$ 为一无限正则基数 $\aleph \neq \aleph_0$. 令 $A = \prod_J^{\aleph} Q$. 若 A 为左 R 模 $C = \bigoplus_{\beta \in B} C_\beta$ 的纯子模，其中每个 C_β 的最小生成数均 $\leqslant |R|$，则有 R 为 $(\aleph, Q)$ 左完全环。

证明 应用命题 1.3、引理 1.1 及 S.U.Chase[2] 定理 3.1 的证明方法不难推得。

定理 1.1 设 $\aleph$ 为一个无限正则基数，$\aleph > \aleph_0$，Q 为平坦忠实左 R 模，以下几条等价：

(1) $\prod_I^{\aleph} Q$ 投射，对任何指标集 I；

(2) $\prod_I^{\aleph} Q_i$ 投射，对任何指标集 I 及任何平坦模族 $\{Q_i : i \in I, Q_i \in Gen(Q)\}$；

(3) R 为 $(\aleph, Q)$ 左完全环且是 $(\aleph, Q)$ 右凝聚的；

(4) R 为左完全的且对任何有限表现右模 N，及任意左 R 模族 $\{Q_i : Q_i \in Gen(Q)\}_{i \in I}$，

$$Tor_1\left(N, \prod_{i \in I}^{\aleph} Q_i\right) \simeq \prod_{i \in I}^{\aleph} Tor_1(N, Q_i)$$

证明 (2) $\Rightarrow$ (1)，取每个 $Q_i = Q$，即获证。

(1) $\Rightarrow$ (3)，由命题 1.1 知，R 为 $(\aleph, Q)$ 右凝聚环，另一方面，取指标集 I，使得 $|I| > |R|$，于是由(1)知：$0 \to Ker \to \bigoplus_B R \to \prod_I^{\aleph} Q \to 0$ 可裂，因此，$\prod_I^{\aleph} Q$ 为 $\bigoplus_B R$ 的纯子模，于是由引理 1.3 知，R 又为 $(\aleph, Q)$ 左完全环。

(3) $\Rightarrow$ (4)，只要注意到 $(\aleph, Q)$ 左完全环必为左完全环，以及结合命题 1.1 中的(4)即可。

(4) $\Rightarrow$ (2)，由文[7]定理 1.12 知：$\prod_I^{\aleph} Q_i$ 平坦，而 R 为左完全环，因而左平坦模皆为投射模，故有(2)

真,整个定理证毕。 □

引理 1.4 设 R 为可换环,Q 为平坦 R 模,s 为无限基数,I 为 R 的理想,若 I 为(s,Q) 有限生成的,则必有 I^k,及 I^k/I^{k+1} 为(s,Q) 有限生成的,对一切 $k \geqslant 1$.

定理 1.2 设 R 为可换环,s 为一个无限基数,Q 为任一平坦 R 模,则有以下几条等价:

(1) R 为 Artin 的环;

(2) R 为(s,Q) 完全环且为凝聚环;

(3) R 为 s 完全环且为凝聚环;

(4) R 为(s,Q) 完全环且 R 为(s,Q) 凝聚环。

注 此处的(4) 表明 R 的 Artin 性可用 s,Q 两个参数来刻画。

证明 因 Artin 环必为诺特环,当然更为凝聚环,故有(1)$\Rightarrow$(3) 及(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(4) 显然。

(4)$\Rightarrow$(1),R 为(s,Q) 完全环,故 R 更为完全环,从而由 R 的可换性知:R 同构于有限个局部环的直和,不妨设 R 为局部环,于是 R/J 为域并且作为 R 模,$R/J \simeq R$ 的某单子模 S(注意,这里 R 首先是完全环,从而每个非零 R 模既有极大子模,又有极小子模)。由命题 1.1 中(5),文[7] 中推论 1.5 及 Schannel 引理知,J 为(s,Q) 有限生成的,这里 J 表 R 的 Jacboson 根,考虑降链:

$$R \supseteq J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \cdots$$

由引理 1.4,J^k 及 J^k/J^{k+1} 均为(s,Q) 有限生成的。故由条件知 $\exists N$,使得 $J^N = J^{N+1} = J^{N+2} = \cdots$. 若 $J^N \neq 0$,则 R 模 J^N 必 $\exists$ 极大子模,从而 J^N 的根 $P(J^N) = J \cdot J^N \neq J^N$,即 $J^{N+1} \neq J^N$ 矛盾,故 $J^N = 0$.

J^k/J^{k+1} 为 R/J 上的模,从而为 R/J 上的向量空间,注意 J^k/J^{k+1} 作为域 R/J 上的模,其乘量乘法为 $\overline{r} \cdot \overline{x} = \overline{rx}$,$\forall \overline{r} \in R/J$,$\forall \overline{x} \in J^k/J^{k+1}$. 若 J^k 与 J^{k+1} 间含 R 子模(即 R 理想) 的无穷降链:

$$J^k \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq \cdots \supseteq J^{k+1}$$

则作为 R/J 模有:$(Z_1/J^{k+1}) \oplus (Z_1/J^{k+1})^{\perp} = J^k/J^{k+1}$,令 h 为 $J^k/J^{k+1} \to Z_1/J^{k+1}$ 的自然投射,则 h 作为 R 模同态也为满同态,由引理 1.4 知:J^k/J^{k+1} 为(s,Q) - 有限生成的(作为 R 模),因此,由文[7] 推论 1.5,其 R 同态像也为(s,Q) 有限生成的。考察:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & J^{k+1} \otimes \Pi^s Q & \to & Z_1 \otimes \Pi^s Q & \to & (Z_1/J^{k+1}) \otimes \Pi^s Q & \to 0 \\
& \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & \\
0 \to & \Pi^s(J^{k+1} \otimes Q) & \to & \Pi^s(Z_1 \otimes Q) & \to & \Pi^s(Z_1/J^{k+1} \otimes Q) & \to 0.
\end{array}$$

由引理 1.1 的证明知:φ_3 满,φ_1 满,故由五引理知:φ_2 也为满射,结果 Z_1 也为(s,Q) 有限生成的,从而 $J^k \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \cdots \supseteq Z_n \supseteq \cdots$ 为 R 的(s,Q) 有限生成理想降链,由 R 为(s,Q) 完全环知:此降链必有限。进一步再次注意到 R 为完全环,每个非零 R 模既有极大子模又有极小子模,因此 J^k 与 J^{k+1} 之间必存在合成列。所以,由 $R \supseteq J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^N = 0$ 知 R 为 Artin 环。

(3)$\Rightarrow$(1),由(1)$\Leftrightarrow$(2) 知,取 $Q = R$ 即可。

推论 1.1 令 s 为非 s_0 的无限正则基数,R 为环,设存在 Q 为平坦忠实左 R 模且 $|Q| < s$,则以下两条等价:(1) $\prod\limits_I^s Q$ 投射,对任何指标集 I;(2) $\prod\limits_I^s R$ 投射,对任何指标集 I。进一步,若 R 还为交换环时,上述两条还等价于:(3) R 为 Artin 环。

证明 由命题 1.2 的证明知 在推论 1.1 的假设下,R 的(s,Q) - 有限生成右理想即为 $f.g.$ 右理想,若(1) 成立,由定理 1.1 知,R 为(s,Q) 左完全且(s,Q) 右凝聚,由命题 1.2 及命题 1.1 的(7) 又知 此时 R 为 s 左完全且(s,R) 右凝聚,即 R 为(s,R) 左完全且(s,R) 右凝聚,再次由定理 1.1 知:(2) 真. (2)$\Rightarrow$(1),只要注意到前述证明中的每一步均是可逆的即可。

最后,当 R 为交换环时,由定理 1.2 中的(1),(4) 及定理 1.1 中的(1),(3) 即可获证。

2 s - 积与可裂性

定理 2.1 设 Q 为平坦左 R - 模,s 为一无限基数,R 为左完全且(s,Q) - 右凝聚环,则对任意小于等于 s 的无限基数 s′ 及任一满足 $Q_i \in Gen(Q)$ 的平坦左 R - 模族 $\{Q_i, i \in I\}$,必有 $\prod\limits_{i \in I}^{s'} Q_i$ 为 $\prod\limits_{i \in I}^{s} Q_i$ 的

直和因子项。

证明 考虑正合列：

$$0 \to \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \to \prod_{i\in I}^{s} Q_i \to \prod_{i\in I}^{s} Q_i / \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \to 0$$

R 为 (s, Q) – 右凝聚环，于是由文[7]的定理1.12得 $\prod_{i\in I}^{s} Q_i$ 平坦，注意到 R 为左完全环，故有左平坦模皆投射，因此，$\prod_{i\in I}^{s} Q_i$ 为投射模，任取 R 的 $f.g.$ 右理想 I，应用文[11]中 Lemma2.1 得

$$I(\prod_{i\in I}^{s'} Q_i) = \prod_{i\in I}^{s'} IQ_i = \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \cap \prod_{i\in I}^{s} IQ_i = \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \cap I(\prod_{i\in I}^{s} Q_i)$$

从而有：$\prod_{i\in I}^{s} Q_i / \prod_{i\in I}^{s'} Q_i$ 左平坦，再一次注意到 R 为左完全环，故有正合列 $0 \to \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \to \prod_{i\in I}^{s} Q_i \to \prod_{i\in I}^{s} Q_i / \prod_{i\in I}^{s'} Q_i \to 0$ 可裂，即 $\prod_{i\in I}^{s'} Q_i$ 为 $\prod_{i\in I}^{s} Q_i$ 的直和因子。

推论2.1 U 为平坦左 R – 模，R 为左完全右 (s, U) – 凝聚环，$s' \leqslant s$ 为两个无限基数，则有 $\Pi^{s'} U$ 为 $\Pi^{s} U$ 的直和项。特别地，R 为左完全右凝聚环时，$\Pi^{s} R$ 为 ΠR 的直和项，从而对任意无限基数，总有 $\Pi^{s} R$ 投射。

证明 上述定理中，取 $\{Q_i : i \in I\}$ 为 $\{U : i \in I\}$，即得本推论的前半部分（即文[8]中的定理2.12），下面证明后半部分。注意到 R 为左完全右凝聚环等价于任意左 R 投射模的直积仍投射，因此有 ΠR 为投射模，另一方面，对一切无限基数 s 及任意平坦左 R 模 Q，R 为右凝聚环等价于 R 为右 (s, Q) – 凝聚。现取任一指标集 I，s 为任一无限基数。

若 $|I| < s$，则有 $\prod_I^{s} R = \prod_I R$，从而结论获证，否则 $|I| \geqslant s$，于是 I 的幂集 2^I 的势必大于 $|I|$。由定理2.1知，$\prod_I^{s} R$ 为 $\prod_I^{|2^I|} R$ 的直因子，进而由 $\prod_I^{|2^I|} R = \prod_I R$ 立知，$\prod_I^{s} R$ 为 ΠR 的直和项，且 $\prod_I^{s} R$ 投射。

s 为一无限基数，记 ω_s 为 $|[0, c)| = s$ 的最小序数 c，无限基数 s 称为一个正则基数是指 s 不能表示为 $\sum_{i\in I} s_i$ 之形式，其中每个 $s_i < s$，且 $|I| < s$。回顾 模 M 称为具有关于零因子的 s – ACC 条件是指，$\{ann_R(N) \mid \phi \neq N \subseteq M\}$ 中的任一良序无穷升链均只有小于 s 个互不相同的元。

引理2.1 M 为左 R 模，s 为一个无限正则基数，设 M 有关于零因子的 s – ACC 条件，令 I 为任一集，满足 $|I| \geqslant s$，而 $\mathscr{F}$ 为 I 的一个 s – 完备滤子（例如 满足 $\mathrm{supp}(\mathscr{F}) = s$ 的极部滤子）。任取点 $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$. 对 $\forall J \in \mathscr{F}$，让 R_J 为 $\{m_i ; i \in J\}$，A_J 为 $\mathrm{ann}_R(R_J)$. 于是集 $\{A_J \mid J \in \mathscr{F}\}$ 必有惟一（关于 $\subseteq$）的最大元 A_T.

证明 用文[12]相应结果的证明方法不难推得。

引理2.2 M 为左 R 模，s 为无限正则基数，则有以下两条等价：

(1) M 有关于零因子的 s – ACC 条件；

(2) 任意势 $\geqslant s$ 的集合 I，及 I 的任意 s – 完备滤子 $\mathscr{F}$，任意 R 的左理想 A，若同态 $f' : A \to \prod_I^{\mathscr{F}} M$ 可延拓为 $R \to \prod_I M$，则 f' 必可延拓为 $R \to \prod_I^{\mathscr{F}} M$.

证明 由引理2.1及文[12]中的定理8，通过适当构造，不难推得。

定理2.2 对左自内射环 R，s 为无限正则基数，$|I| \geqslant s$，有以下三条等价：

(1) $\prod_{i\in I}^{s} R$ 为 $\prod_{i\in I} R$ 的直和项；

(2) 对 $\forall L \underset{l}{\triangle} R$，总存在左理想 J 满足 $J \subseteq L$，且 $gdJ < s$，使得 $\mathrm{ann}_R(L) = \mathrm{ann}_R(J)$，这里 gdJ 表 J 的生成维数，即 $gdJ = \inf\{|G| \mid J = \langle G \rangle\}$；

(3) 对 I 的任一 s – 完备滤子 $\mathscr{F}$，$\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 内射。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由文[12]中的推论6知，此时 R 具有关于零因子的 s – ACC 条件，再由文[12]中的定理9得，(2)真。

(2) $\Rightarrow$ (1)，由文[12]的定理9知，R 具有关于零因子的 s – ACC 条件，考虑下列正合列：

$$0 \to \prod_I^{s} R \to \prod_I R \to \prod_I R / \prod_I^{s} R \to 0$$

对任意左 R 循环模 Rx，由长合列定理得如下正合列：

$$0 \to Hom(Rx, \prod_I^{s} R) \to Hom(Rx, \prod_I R) \to Hom(Rx, \prod_I R / \prod_I^{s} R) \to Ext^1(Rx, \prod_I^{s} R) \to Ext^1(Rx, \prod_I R) \to \cdots$$

注意到 R 具有关于零因子的 $\aleph$ - ACC 条件,利用文[12] 中定理 8 的(3),有:$Hom(Rx, \prod_I R) \to Hom(Rx, \prod_I R / \prod_I^{\aleph} R)$ 为满射,另一方面,因 R 内射,故 $\prod_I R$ 也内射,因此 $Ext^1(Rx, \prod_I R) = 0$,进而得:$Ext^1(Rx, \prod_I^{\aleph} R) = 0$。由左 R 循环模 Rx 的任意性,故有 $\prod_I^{\aleph} R$ 内射,结果 $\prod_I^{\aleph} R$ 为 $\prod_{i \in I} R$ 的直和项。

(1)$\Rightarrow$(3). 假定(1) 成立,R 具有关于零因子的 $\aleph$ - ACC 条件。故由引理 2.2 知,对 I 的任一 $\aleph$ - 完备滤子 $\mathscr{F}$,R 的任意左理想 A,若 $f: A \to \prod_I^{\mathscr{F}} R$ 可延拓为 $f_1: R \to \prod_I R$,则 f 必可延拓为 $: R \to \prod_I^{\mathscr{F}} R$,再一次注意到 $\prod_I R$ 内射,故对任意 $f: A \to \prod_I^{\mathscr{F}} R$,必 $\exists f_0: R \to \prod_I R$,使得下图成为交换图

$$\begin{array}{ccc} \prod_I^{\mathscr{F}} R & \xrightarrow[i]{} & \prod_I R \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 \to A & \to & R \end{array}$$

因此有:$\forall f: A \to \prod_I^{\mathscr{F}} R$,$f$ 必可延拓为 $R \to \prod_I^{\mathscr{F}} R$,根据 Baer 准则,$\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 必内射。

(3)$\Rightarrow$(1),构造 I 的滤子 $\mathscr{F}$ 如下:$\mathscr{F} = \{J \mid J \subseteq I, |I \setminus J| < \aleph\}$,于是 $\mathscr{F}$ 为 I 的一个 $\aleph$ - 完备滤子,且 $\prod_I^{\aleph} R = \prod_I^{\mathscr{F}} R$. 由 $\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 的内射性立即便知:$\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 为 $\prod_I R$ 的直和项。

注记 定理 2.2 中的(1)$\Leftrightarrow$(2) 事实上在文[12] 中的引言中已经提及.

推论 2.2 R 为 QF 环,任取无限正则基数 $\aleph$,任取集合 I 满足 $|I| \geqslant \aleph$,总有:$\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 内射,进而 $\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 投射,其中 $\mathscr{F}$ 为 I 的任意 $\aleph$ - 完备滤子。

证明 R 为 QF 环等价于 R 为左 Noether 且左自内射环,也等价于 R 为右 Noether 且右自内射环,进一步还有 QF 环为左、右 Artin 环。因此,R 更为左完全右凝聚环,从而 $\prod_I R$ 仍投射。显然,R 为 QF 环时定理 2.2 的(2) 满足,因此有 $\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 内射,从而作为 $\prod_I R$ 直因子的 $\prod_I^{\mathscr{F}} R$ 也投射。

推论 2.3 R 是 QF 环,任意无限正则基数 $\aleph$,任意满足 $|I| \geqslant \aleph$ 的集合 I,以及对 I 的任意 $\aleph$ 完备滤子,均存在集合 K_I 使得 $\prod_I^{\mathscr{F}} R \simeq \bigoplus_{i \in K_I} e_i R$,其中 e_i 为 R 的本原幂等元。特别地,$\exists K$ 使得 $\prod_I^{\aleph} R \simeq \bigoplus_{i \in K} e'_i R$,其中 e'_i 为 R 的本原幂等元。

证明 由 C. Faith-E. A. Walker 定理知 R 为 QF 环,等价于投射模皆内射,也等价于内射模皆投射模,再由文[13] 中的定理 76.4 知,推论 2.3 真。

参 考 文 献:

[1] Matlis E. Injective modules over Noetherian rings[J]. Pacific J. Math., 1958, 8: 511 - 528.

[2] Chase S U. Direct products of modules[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, 97: 457 - 473.

[3] Dauns J. Uniform dimensions and subdirect products[J]. Pacific J. Math., 1987, 126: 1 - 19.

[4] Loustaunau P. $\mathscr{F}$-products of injective, flat and projective modules[J]. Comm. in Alg., 1990, 18: 3671 - 3683.

[5] Lam T Y. Bass 's work in ring theory and projective modules[J]. Contemproary Mathematics, Vol. 1999, 243: 83 - 124.

[6] Hrbacek K, Jech T. Introduction to Set Theory[M], Monograph in Pure and Appl. Math, Marcel Dekker, New York, 1978.

[7] Jirasko J. Generalized n-coherence[J]. Comment. Math. Univ. Carolina, 2000, 41(1): 1 - 7.

[8] Oyonarte L, Torrecillas B. Large subdirect products of flat modules[J]. Comm. in Alg., 1996, 24(4): 1389 - 1407.

[9] Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra[M]. New York: Acad. Press, 1979.

[10] Chen Jianlong, Ding Nanqing. On n-coherent rings[J]. Comm. in Alg, 1996, 24(10): 3211 - 3216.

[11] Loustaunau P. Large subdirect products of projective modules[J]. Comm, in Alg., 1989, 17(1): 197 - 215.

[12] Loustaunau P. Large subdirect product of modules as direct summand of their direct product[J]. Comm. in Alg., 1989, 17(2): 393 - 412.

[13] Kertész A. Lectures on Artinican Rings[M]. Akabémiai Kiadó, Budapest, 1987.

[14] Bourbaki N. Algèbre Commutative[M]. Chap. 1 - 2, Hermann, 1961.