

文章编号:1001-2486(2004)03-0034-05

## 基于模糊信息粒化理论的图像插值方法\*

修保新<sup>1</sup>,任双桥<sup>2</sup>,张维明<sup>1</sup>

(国防科技大学人文与管理学院,湖南长沙 410073; 2. 国防科技大学 ATR 实验室,湖南长沙 410073)

**摘要:**提出了模糊信息粒化理论在图像插值中的应用,介绍了图像的模糊信息粒化结构,分析了基于图像模糊粒化思想进行图像插值的基本原理,并提出了具体的基于图像模糊粒化结构的插值方法。实验结果表明该方法的效果很好,在客观评价指标上,性能普遍好于传统的图像插值方法。

**关键词:**模糊信息粒化;粒化结构;图像插值**中图分类号:**TN911.73 **文献标识码:**A

## An Approach to Image Interpolation Based on the Theory of Fuzzy Information Granulation

XIU Bao-xin<sup>1</sup>, REN Shuang-qiao<sup>2</sup>, ZHANG Wei-ming<sup>1</sup>

(1. College of Humanities and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. ATR Laboratory, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Present the application of fuzzy information granulation (FIG) to image interpolation. Granulation structure of image is introduced, and the basic principle of image interpolation based on FIG is investigated. A new interpolation algorithm is proposed based on such granulation structure. It has been testified with better effect than the traditional methods by many experiments.

**Key words:** fuzzy information granulation; granulation structure; image interpolation

近来,Zadeh<sup>[1-3]</sup>讨论的信息粒化可能是计算科学、逻辑、哲学和其它领域的一个非常重要的研究内容,它正成为国内外的研究热点。所谓粒是指一些元素的集合,这些元素具有不可分辨性、相似性或函数的内聚性等等<sup>[4]</sup>。在现实生活中存在着大量的人工推理、概念生成等与人的感知和认识相联系的领域,在这些领域中,模糊性显得非常重要,所以模糊信息粒自然地成为粒度计算的一个重要研究方面,例如论域上的一个模糊集可以视为信息粒,由模糊规则也可以生成信息粒。

Zadeh<sup>[4]</sup>最先提出了模糊信息粒理论研究的一般框架。W. Pedrycz 等<sup>[5]</sup>研究了信息粒间的结合问题。在应用方面,数字化图像本身具有可粒化的特点,如利用图像的内容信息和空间信息进行粒化。K. Hirota 和 W. Pedrycz<sup>[6]</sup>用模糊关系来描述一幅静态灰度图像,并提出了基于模糊关系计算的图像压缩方法,最早将模糊信息粒化思想运用到图像压缩领域。H. Nobuhara 等<sup>[12]</sup>提出了一种求解模糊关系方程最大解的快速方法,减少了图像重构的运算量。文献<sup>[14]</sup>提出了基于模糊信息粒化思想的图像边缘检测方法。

另一方面,图像插值是数字图像处理领域中一类经常碰到的问题,而且具有十分重要的实用价值。通过插值可以实现图像的放大显示,增强图像质量。图像插值一般是指在基于参数化模型的框架下,在给定的空间范围内,从有限的离散采样数据中复原出原来连续的图像信号。对于单幅图像的插值,经典的插值算法是利用邻近像素点灰度值的加权平均来计算未知像素点处的灰度值,而这种加权平均一般表现为信号的离散采样值与插值基函数之间的二维卷积。基于该模型的图像插值方法常用的基函数有矩形函数、多项式函数<sup>[9]</sup>、样条函数<sup>[10]</sup>、三角函数<sup>[13]</sup>和 sinc 函数等。对应于这些基函数的插值算法主要有最近邻域插值、双线性插值、双三次卷积和基于三次 B 样条函数的插值技术等。

\* 收稿日期:2003-12-15

基金项目:国家部委资助项目(41322020301);国防科技大学基础研究资助项目(Jc03-02-003)

作者简介:修保新(1977—),男,博士生。

考虑到图像空间的可粒化性,可以换一个角度,用图像粒化的方法来描述和分析图像,并进而考虑图像插值,丰富模糊信息粒化理论在图像处理领域的应用。

## 1 相关定义和定理

定义两个集合  $X = \{x_m: m = 1, 2, \dots, M\}$ ,  $Y = \{y_n: n = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $F(X)$  和  $F(Y)$  分别是  $X$  和  $Y$  上全体模糊集所构成的集合。 $R \in F(X \times Y)$  为笛卡尔积  $X \times Y$  上的一个模糊关系:  $R: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ 。

为了表述简单,下面将模糊集和模糊关系与它们的隶属度函数等同起来。

定义 1<sup>[11]</sup> 称映射  $t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  为  $t$  模,若  $\forall x, y, z, w \in [0, 1]$ , 有下列条件成立:

$$\textcircled{1} 0tx = 0, 1tx = x \quad (1)$$

$$\textcircled{2} xty \leq ztw, \text{ if } x \leq z \text{ and } y \leq w \quad (2)$$

$$\textcircled{3} xty = ytx \quad (3)$$

$$\textcircled{4} (xty)tz = xt(ytz) \quad (4)$$

称映射  $s: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  为  $t$  的对偶模,若  $\forall x, y \in [0, 1]$ , 有下式成立:

$$(1-x)s(1-y) = 1 - xty \quad (5)$$

定义 2<sup>[11]</sup> 设  $\varphi_t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , 使得  $\forall x, y \in [0, 1]$ , 有

$$x\varphi_t y = \sup\{z \in [0, 1]: xtz \leq y\} \quad (6)$$

称  $\varphi_t$  为  $\varphi_t$  算子。

定义 3 设  $A, B \in F(X \times Y)$ , 而记  $A \circ B = \sup_{x,y} (A(x, y) t B(x, y))$ ,  $A \cdot B = \inf_{x,y} (A(x, y) s B(x, y))$ , 分别称  $A \circ B, A \cdot B$  为模糊集  $A$  与  $B$  的广义内积和广义外积,其中  $t$  和  $s$  是对偶模。

定义 4 设  $P \in F(X), Q \in F(Y)$ , 记

$$(P \times Q)(x, y) = P(x) t Q(y) \quad (7)$$

称  $P \times Q$  为模糊集  $P, Q$  的  $t$  模笛卡尔积。

定理 1<sup>[11]</sup> 令  $P \in F(X), Q \in F(Y), R \in F(X \times Y), g \in [0, 1]$ , 且满足  $g = R \circ (P \times Q)$ , 并且  $\forall (x, y) \in X \times Y$ , 有

$$\hat{R}(x, y) = (P(x) t Q(y)) \varphi_t g \quad (8)$$

则  $\hat{R}$  是  $R$  的最大解。

由定理 1 知道,  $\forall (x, y) \in X \times Y, \hat{R}(x, y) \geq R(x, y)$ 。

## 2 图像的模糊信息粒化表示

通过将图像灰度归一化处理,可以将图像灰度取值范围变换到  $[0, 1]$ 。这样可以用模糊关系  $R \in F(X \times Y)$  表示一幅  $M \times N$  的灰度图像( $X$  和  $Y$  的定义见第 1 节)。在图像(模糊关系)的  $x$  和  $y$  坐标轴上分别定义一族模糊集(论域分别为  $X$  和  $Y$ , 如图 1), 并用  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_I\}$  和  $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_J\}$  表示, 其中  $P_i, Q_j$  就是用模糊集表示的信息粒。通常取  $I < M, J < N$ 。

### 2.1 图像平面的粒化结构<sup>[14]</sup>

信息粒  $P_i$  与  $Q_j$  通过算子  $t$  模运算得到二维空间中的一个笛卡尔信息粒  $T_{ij}$ , 其中

$$T_{ij}(x, y) = (P_i \times Q_j)(x, y) = P_i(x) t Q_j(y) \quad (9)$$

这样就得到了图像平面的一个粒化结构  $\{T_{ij}, i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J\}$ , 也可以记为  $\{P, Q\}$ 。图像中的像素被限定在相应的笛卡尔信息粒中。图像平面的不同粒化结构反映图像的不同空间特征。

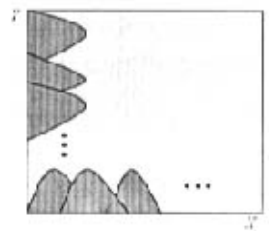


图 1 图像两个方向上的信息粒划分

Fig. 1 Granular partition in axial direction

2.2 图像模糊粒化的数字化表示

定义5 (图像模糊粒化的数字化表示)  $R, \{T_{ij}, i=1,2,\dots,I; j=1,2,\dots,J\}$  的定义如前所述,

$$g_{ij} = R \circ T_{ij} = R \circ (P_i \times Q_j), \quad (i,j) \in I \times J \tag{10}$$

则图像(模糊关系)  $G = [g_{ij}]_{I \times J}$  为图像  $R$  在粒化结构  $\{T_{ij}, i=1,2,\dots,I; j=1,2,\dots,J\}$  下的数字化表示。

文献[6]将  $G$  视为模糊关系  $R$  的一种压缩表示,即可以用粒化后少量的数据来表示原有的信息,从而得到新的意义下的数据压缩方法,并提出了由图像  $G$  重构图像  $R$  的方法。当然,由于压缩表示损失了一些信息,这种重构也只能是近似的。粒化效果的好坏取决于许多因素,如复合算子的选取,图像的粒化结构表示等等。只有得到一幅图像贴切的粒化结构,才能尽可能准确地反映原有的信息。

3 基于图像模糊粒化结构的插值方法

通过第2节的学习知道,可以通过粒化的方法得到一幅图像的压缩表示,即实现了从高分辨率图像到低分辨率图像的转化。考虑相反的问题,如果已有一幅图像,如何得到更高分辨率的图像? 本节首先说明了基于粒化思想的图像插值原理,然后给出了一种具体的图像插值方法。

3.1 基于图像模糊粒化思想的图像插值原理

已有一幅低分辨率图像  $G = [g_{ij}]_{I \times J}$ , 可以将  $G$  看作是相对应的高分辨率图像  $R = [r_{mn}]_{M \times N}$  在某种粒化结构  $\{T_{ij}, i=1,2,\dots,I; j=1,2,\dots,J\}$  下的压缩表示;如果能明确地知道  $\{T_{ij}\}$ , 就可以通过  $G$  和  $\{T_{ij}\}$  来重构图像,从而得到  $R$  的近似实现。

但事实上,事先并不能得到这种粒化结构  $\{T_{ij}\}$ , 为了解决这个问题,可以定义一个通用的图像平面粒化结构  $\{T'_{ij}\}$ , 从而得到  $R$  在结构  $\{T'_{ij}\}$  下的近似实现  $R'$ , 如图2所示。

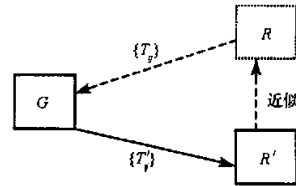


图2 基于图像模糊粒化思想的插值原理  
Fig.2 Interpolation principle based on FIG

考虑到在图像插值的假设中认为  $G$  是  $R$  的均匀的采样,可以定义如下的粒化结构  $\{P, Q\}$ , 其中,

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_I\}, \quad Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_J\}$$

$$P_i(x_m) = \exp\left[-\sigma\left(i\frac{M}{I} - m\right)^2\right], \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$Q_j(y_n) = \exp\left[-\sigma\left(j\frac{N}{J} - n\right)^2\right], \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad I < M, J < N$$

有了上面的图像插值原理以后,我们的目标就是要设计由  $G$  和  $\{P, Q\}$  来重构图像的具体方法。

3.2 基于图像模糊粒化结构的插值方法

定理2<sup>[12]</sup> 设  $P_i \in P, Q_j \in Q, g_{ij} \in [0, 1], R \in F(X \times Y)$ , 并且它们满足公式(10)。令

$$\hat{R}(x, y) = \inf_{j \in J} \{Q_j(y) \phi_i \{ \inf_{i \in I} \{P_i(x) \phi_i g_{ij}\} \} \} \tag{11}$$

则  $\hat{R}$  是  $R$  的最大解。

定义6 (图像  $R$  的补图像) 称  $R^c = 1 - R$  为  $R$  的补, 即对  $\forall (x, y) \in X \times Y, R^c(x, y) = 1 - R(x, y)$ 。

定理3 (图像  $R$  的下界确定定理)  $R^c$  通过公式(10)和公式(11)定义的运算得到  $\tilde{G}$  和  $\hat{R}^c$ , 即  $\tilde{G}$  为图像  $R^c$  在粒化结构  $\{T_{ij}, i=1,2,\dots,I; j=1,2,\dots,J\}$  下的数字化表示, 而  $\hat{R}^c$  是  $R^c$  的最大解, 则  $(1 - \hat{R}^c)$  是  $R$  的一个下界。

证明 由定理2得到

$$\hat{R}^c(x, y) \geq R^c(x, y) \Rightarrow 1 - \hat{R}^c(x, y) \leq 1 - R^c(x, y) \Rightarrow 1 - \hat{R}^c(x, y) \leq R(x, y) \quad \square$$

由定理2和定理3, 如果已知图像  $G$  和  $\tilde{G}$ , 并给定粒化结构  $\{P, Q\}$ , 就可以得到相应的高分辨率图像  $R$  的上界  $\hat{R}$  和下界  $(1 - \hat{R}^c)$ 。这样可以通过  $(1 - \hat{R}^c)$  和  $\hat{R}$  来重建图像, 最简单的方法是用  $(1 - \hat{R}^c + \hat{R})/2$  作为插值后的图像。

但是对于图像插值来说, 通常只会已知  $G$ , 只能通过近似的办法获得  $\tilde{G}$ 。考虑到  $\tilde{G}$  是图像  $R^c = 1 -$

$R$  在相同的信息粒结构划分下的压缩表示,可以近似用  $1 - G$  来代替  $\tilde{C}$ ,两者之间的差异只在图像的高频信息处较为明显,这在文献[14]中进行了讨论。这样,就可以建立基于图像模糊粒化结构的插值方法的完整过程,描述如下:

设  $G = [g_{ij}]_{I \times J}$  为已知的大小为  $I \times J$  的图像,希望将它放大成大小为  $M \times N$  的图像。

(1) 首先给定 3.1 节定义的粒化结构  $|P, Q|$ , 其中参数  $\alpha = 0.2$ ;

(2) 通过下面的计算得到放大后的图像  $\tilde{R}$ :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{by(11)} & \hat{R} \\ \downarrow & & \longrightarrow \tilde{R} = \frac{1 - \hat{R}^c + \hat{R}}{2} \\ \tilde{C} = 1 - G & \xrightarrow{by(11)} & \hat{R}^c \end{array}$$

这里采用 Yager 定义的  $t$  模 ( $p = 1$ )<sup>[7]</sup>:

$$xy = 1 - 1 \wedge (2 - x - y) = 0 \vee (x + y - 1) \tag{12}$$

相应的  $\varphi$  算子满足:

$$x\varphi y = \sup\{z \in [0, 1] : xtz \leq y\} = 1 \wedge (1 + y - x), \quad x, y \in [0, 1] \tag{13}$$

### 4 实验及结果分析

本文以  $512 \times 512$  的 Lenna 图像作为原始图(图 4)进行仿真实验,首先对它进行隔行隔列抽取,得到大小为  $256 \times 256$  的低分辨率图像(图 3),然后分别采用传统的最近邻域插值、双线性插值、双三次卷积插值、参数化双三次卷积和本文提出的基于图像模糊粒化结构的插值方法对图 3 进行插值,插值结果见图 5~9。采用均方误差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)作为客观评价指标,评价结果见表 1。



图 3 低分辨率图像  
Fig.3 Low resolution image



图 4 原始图  
Fig.4 Original image



图 5 最近邻域插值算法  
Fig.5 Nearest neighbor interpolation



图 6 双线性插值算法  
Fig.6 Bilinear interpolation



图 7 双三次卷积插值算法  
Fig.7 Bicubic convolution interpolation



图 8 参数化双三次卷积插值算法,正则化参数  $\alpha = -0.5$   
Fig.8 Parameterized bicubic convolution interpolation, regularized parameter  $\alpha = -0.5$

表1 各种插值方法的插值性能比较

Tab.1 Comparison of five methods

插值方法	MSE	PSNR
最近邻域插值	108.78	27.77
双线性插值	32.84	32.97
双三次卷积插值	30.73	33.26
参数化双三次卷积	29.00	33.51
基于模糊粒化结构的方法	27.67	33.71

注: MSE 和 PSNR 由插值后的图像和原图像(图 4)比较得到

通过试验看出,最近邻域插值算法是最简单的,但是其结果也是最差的。在上述传统的插值方法中,结果最好的是基于参数化双三次卷积。而本文提出的基于图像模糊粒化结构的插值方法则又提高了 0.2dB。本文的方法是以基于粒化思想的图像插值原理为基础的,具有深刻的物理意义,针对粒化结构的进一步研究将会促进插值性能的提高。

## 5 结束语

本文提出了模糊信息粒化理论的新的应用背景——图像插值。介绍了图像平面信息粒结构划分的表示方法,并分析了基于图像模糊粒化思想进行图像插值的基本原理,最后给出了具体的图像插值方法。实验结果表明,在客观评价指标上,基于模糊粒化结构的图像插值方法具有很好的效果,性能普遍好于传统的图像插值方法。本文试探性地将图像模糊粒化的思想与图像插值联系起来,做了一些初步的工作,希望能给以后的研究提供参考价值。

## 参考文献:

- [1] Zadeh L A. Fuzzy Sets and Information Granularity [A]. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, M. Gupta, R. Ragade, and R. R. Yager, Eds. Amsterdam, the Netherlands: North-Holland, 1979: 3-18.
- [2] Zadeh L A. Fuzzy Graphs, Rough Sets and Information Granularity [A]. Proc. Third Int. Workshop on Rough Sets and Soft Computing [C], Nov 1994: 10-12.
- [3] Zadeh L A. Fuzzy Logic = Computing with Words [J]. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 1996, 4(2): 103-111.
- [4] Zadeh L A. Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and Its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic [J]. Fuzzy Sets Syst., 1997, 90(2): 111-127.
- [5] Pedrycz W, Smith M H, Bargiela A. A Granular Signature of Data[C]. Int. Conf. NAFIPS-2000, Atlanta, June 2000: 69-73.
- [6] Hirota H, Pedrycz W. Fuzzy Relational Compression [J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., pt. B, 1999, 29(3): 407-415.
- [7] Mizumoto M. Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I: Cases of T-norms, T-conorms and Averaging Operators[J]. Fuzzy Sets Syst., 1989, 31(2): 217-242.
- [8] Yao Y Y. Granular Computing: Basic Issues and Possible Solutions[C]. Proceedings of the 5<sup>th</sup> Joint Conference on Information Sciences, Atlantic, Feb 2000: 186-189.
- [9] Meijering E H W, Zuiderveld K J, Viergever M A. Image Reconstruction by Convolution with Symmetrical Piecewise nth-Order Polynomial Kernels [J]. IEEE Trans. Image Processing, 1999, 8(2): 192-201.
- [10] Unser M. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1999, 16(6): 22-38.
- [11] Pedrycz W. On Generalized Fuzzy Relational Equations and Their Applications[J]. J. Math. Anal. Applicat., 1985, 107: 520-536.
- [12] Nohubara H, Pedrycz W, Hirota K. Fast Solving Method of Fuzzy Relational Equation and Its Application to Lossy Image Compression/Reconstruction [J]. IEEE Trans. Fuzzy Syst., 2000, 8(3): 325-334.
- [13] 郝鹏威, 朱重光. 基于小波的图像插值算法 [J]. 遥感学报, 1998, 2(2): 98-102.
- [14] 修保新, 吴孟达. 图像模糊信息粒的适应性度量及其在边缘检测中的应用 [J]. 电子学报, 2004, 32(2): 274-277.



图9 基于图像模糊粒化结构的插值方法  
Fig.9 Interpolation algorithm based on image granulation structure



