

一个二阶精度的大粒子有限体积方法<sup>\*</sup>

刘翠, 成礼智

(国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:**对二维 Euler 方程给出一个二阶精度的非结构网格有限体积方法, 方法的主要思想是把 Euler 方程的一个时间步分两步计算: 第一步只考虑压力加速效应, 第二步再考虑输运效应, 离散过程中采用一种具有最小二乘思想的线性重构函数以计算交界面的流通量, 数值实验表明该方法是非常有效的。

**关键词:**非结构网格; 大粒子方法; 有限体积方法

**中图分类号:** O24 **文献标识码:** B

A Large Particle Finite Volume Scheme on Two Dimension  
Unstructured Meshes

LIU Cui, CHENG Li-zhi

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** We have constructed a second order accuracy finite volume scheme on Euler equations, the new scheme consist of two steps for each time step: the first step we take into account the effects of acceleration caused by pressure gradients, and the second step transport effects are computed. A non-oscillatory linear reconstruction of flow variables is applied, the result of numerical experiment is satisfactory.

**Key words:** unstructured mesh; large particle; finite volume scheme

大粒子方法 (FLIC)、HELP 方法和流体网格法等是求解非定常 Euler 方程的一类非常重要的方法<sup>[1]</sup>, 这些方法的共同思想是把 Euler 方程按力学意义分裂成压力加速效应和输运效应两部分, 再分别进行离散, 于是一个时间计算步由两步组成。这些方法都是一阶迎风格式, 分辨率低, 在计算激波等间断问题时须加入人工粘性项, 而且粘性系数在计算中须调整<sup>[2,3]</sup>。

本文对二维非结构网格构造了一个非振荡的大粒子方法, 该方法具有高分辨率, 且不需另加人工粘性。方法的主要思想是在求解过程中, 对未知变量作了一种具有最小二乘思想的线性重构, 对压力效应采用文献[4]中的方法来求解, 而输运效应部分的离散则用二阶逆风格式。典型问题的数值计算结果表明该方法是有效的。

## 1 数值方法

考虑二维 Euler 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v E + \rho v)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2004-02-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10001038); 国防科技大学基础研究资助项目

作者简介: 刘翠(1964—), 女, 讲师, 硕士生。

其中,  $E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ,  $E$  为比总能,  $e$  为比内能, 状态方程  $p = (\gamma - 1)\rho e$ 。记  $X = (x, y)$ 。

用大粒子方法近似求解(1)式时, 一个时间步由下列两步组成(直接写出其积分形式):

第一步: 令密度  $\rho$  不随时间改变, 而只考虑压力效应, 由此计算出速度  $u$ 、 $v$  和比总能  $E$  的近似值, 其控制方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \cdot n_x ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \cdot n_y ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \cdot (un_x + vn_y) ds = 0 \end{cases} \quad (2)$$

第二步: 考虑输运效应, 由此求出各状态量在新时间步长下的近似值。其方程的积分形式为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho(un_x + vn_y) ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho u(un_x + vn_y) ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho v(un_x + vn_y) ds = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho E(un_x + vn_y) ds = 0 \end{cases} \quad (3)$$

输运效应的计算比较容易处理, 关键是压力效应的计算, 因为这一过程可能会出现数值振荡, 在计算过程中, 采用如图 1 所示的三角形网格, 在求解方程(2), (3)时, 采用网格平均型, 即计算出每个变量的网格平均值, 而在积分方程中又需要用到变量的值, 故在每一个三角形单元上将变量的网格平均值恢复到变量的值是非常必要的。

为了保证计算结果有二阶精度, 所以在每一个三角形单元上必须对变量进行线性重构以得出变量的高阶近似。现在以三角形单元  $\triangle ABC$  为例来描述我们的重构思想。记  $X = (x, y)$ ,  $f$  是变量,  $|\triangle ABC|$  是  $\triangle ABC$  的面积, 在  $\triangle ABC$  上积分得的网格平均记为  $\bar{f}_{ABC}$

$$\bar{f}_{ABC} = \frac{1}{|\triangle ABC|} \int_{\triangle ABC} f d\Omega。$$

在二维平面上确定一个线性多项式一般需要三个约束条件, 为了获取流场中更多的信息, 我们采用四个网格平均值来确定一个线性多项式, 如图 1, 用  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BDC$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle AFB$  四个单元上的网格平均值确定线性多项式时多了一个约束条件, 采用最小二乘方法可以唯一地得到一个一次多项式, 记此线性多项式为

$$v(X) = v_{ABC} + A \cdot (X - X_{ABC}) \quad (4)$$

其中,  $X_{ABC}$  是  $\triangle ABC$  的中心坐标,  $v_{ABC}$  是在  $\triangle ABC$  上的解平均值。

容易知道, 线性函数在三角形区域上的最大值和最小值只能在其顶点达到, 基于此, 为了在使用线性函数恢复后不出现新的极值(非振荡), 在(4)中引进梯度限制器  $\Phi_{ABC}$ , 使得最后的线性函数为:

$$L_{ABC}(X) = v_{ABC} + \Phi_{ABC} \cdot A \cdot (X - X_{ABC}) \quad (5)$$

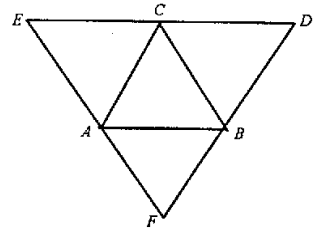


图 1 计算网络  
Fig.1 Computing net

$$\Phi_{ABC_i} = \begin{cases} \min\left(1, \frac{M_{ABC} - v_{ABC}}{v_{ABC_i} - v_{ABC}}\right) & v_{ABC_i} > v_{ABC} \\ \min\left(1, \frac{m_{ABC} - v_{ABC}}{v_{ABC_i} - v_{ABC}}\right) & v_{ABC_i} < v_{ABC} \\ 1 & v_{ABC_i} = v_{ABC} \end{cases}$$

其中,  $\Phi_{ABC} = \min(\Phi_{ABC_i}) (i = 1, 2, 3)$ ,  $ABC_i$  是三角形的三个顶点,  $M_{ABC}$  和  $m_{ABC}$  分别是与  $\triangle ABC$  单元至少有一个公共点的所有三角形单元上解平均的最大值和最小值, 容易验证在三角形单元  $\triangle ABC$  上的变量值必在  $M_{ABC}$  和  $m_{ABC}$  之间, 从而数值解不出现新的极值(非振荡)。

将文献[4]中的方法推广到二维可以将式(2)离散, 在此基础上再用二阶逆风格式离散(3)式, 最后得到整体二阶的格式。

## 2 数值实验

### 1. 实验 1: 平面激波反射问题

来流马赫数是 2.9, 激波入射角为 29 度, 流动  $x$  方向和  $y$  方向的长度分别为 4 和 1, 图 2 给出了等马赫线图。

### 2. 实验 2: 无粘圆柱绕流

计算时, 圆柱半径为 0.3, 来流为  $x$  方向, 来流马赫数是 6.0, 图 3 给出了等马赫数图。

从上述数值实验的结果可以看出, 本文所提出的方法既简单, 又可以比较好地模拟流场中的各种间断, 并且具有好的分辨率。

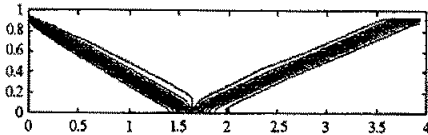


图 2 平面激波反射问题等马赫线图  
Fig.2 Mach contours for plate shock wave reflection

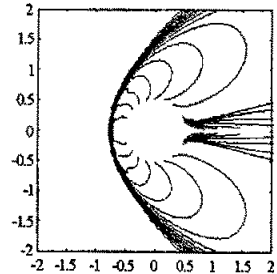


图 3 无粘圆柱绕流等马赫数图  
Fig.3 Mach contours for blunt cylinder flow

## 参考文献:

- [1] Gentry R A, et al. An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems[J]. J. Comp. Phy., 1966, 1:87.
- [2] Nobuhiro U, et al. On the Numerical Analysis of Compressible Flow Problems by the "Modified FLIC Method"[J]. Computers and Fluids, 1980, 8: 251.
- [3] 李荫藩, 曹亦明. 任意三角形(或四边形)网格的格子中流体方法[J]. 计算数学, 1981, 3:381.
- [4] 李荫藩, 曹亦明. 二阶大粒子差分方法[J]. 中国科学(A), 1985, (8).
- [5] Van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov Method[J]. J. Comp. Phy. 1979, 32:101.
- [6] Jasak H, Weller H C. High Resolution TVD Differencing Scheme for Arbitrarily Unstructured Meshes[J]. Int. J. Numer. Mech. Fluids, 1999, 31: 431.
- [7] Kobayashi M H, Pereira M C. A Conservation Finite Volume Second Order Accurate Projection Method on Hybrid Unstructured Grids[J]. J. Comp. Phy. 1999, 150:40.

