

文章编号 :1001 - 2486(2004)04 - 0072 - 05

二维周期钢管阵列带隙特性计算中的时域有限差分算法*

王 刚, 赵宏刚, 温激鸿, 韩小云

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘 要 通过选取合适的离散时间间隔, 解决了大密度、弹性常数差界面上时域有限差分(FDTD)算法的不稳定现象。进而采用改进的 $O(2, 4)$ 精度 FDTD 算法, 计算了由空气中二维周期钢管正方形阵列组成的晶格常数为 103mm 的声子晶体的 Γ -X 方向禁带, 计算结果与测试结果吻合较好。

关键词 声子晶体; 声子带隙; 时域有限差分; 交错网格

中图分类号 :O321 **文献标识码** :A

Finite Difference Time Domain Method for the Study of the Band Gap in the Two-dimensional Rectangular Arrays of the Steel Tubes in Air

WANG Gang, ZHAO Hong-gang, WEN Ji-hong, HAN Xiao-yun

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract By choosing the proper time difference, the algorithmic instability of $O(2, 4)$ finite difference time domain (FDTD) method is got rid of in dealing with the crucial distinction of density and elastic constants on interfaces. Using the improved staggered grid FDTD method, we calculated the Γ -X directional band gap of the two-dimensional phononic crystal, which was composed of rectangular arrays of $\varnothing 28.5$ mm steel tubes with lattice constant of 103mm. Calculated results were compared with the measured ones, and both results coincided well.

Key words phononic crystal; phononic band-gap; finite difference time domain; staggered grid

近年来, 弹性常数或密度周期性分布的人造复合结构(即声子晶体)中声波及弹性波传播的研究受到广泛关注^[1~15]。在特定的频段(禁带), 声子晶体结构中不存在声波和弹性波的传播。声子晶体的研究, 一方面有助于进一步地了解声波及振动在非均匀介质中传播时的局域现象, 另一方面则有利于扩展其在减振降噪、声滤波器、新型传感器等领域的应用, 具有一定的理论价值和应用前景。

现有的声子晶体带隙计算方法主要有平面波展开法(PWE)^[1~6]、多散射理论(MST)^[7~11]以及时域有限差分(FDTD)^[12~15]算法。PWE 算法应用最为广泛, 相对简单且易于理解, 但只能计算无限周期声子晶体的带结构, 间接得到禁带频率范围, 却不能得到实际有限周期结构中的声波及弹性波透射、反射特性等参数, 而且在处理固液耦合(固体基体中的液体或者相反)时, 存在缺陷^[14]; MST 算法可以解决这些问题, 但理论推导十分复杂, 而且目前只限于处理球形单元结构的声子晶体, 应用上存在局限。

FDTD 算法基于对偏微分波动方程的离散化处理, 通过时间和空间的离散化, 将偏微分方程转化为差分方程, 继而采用数值计算方法, 求解波传播过程中各个离散点的所有振动参数与时间的函数关系。FDTD 算法不但可以计算周期结构中的带结构, 而且可以计算有限结构的透射、反射等特性, 不受固液耦合、结构形式等因素的影响。FDTD 方法在地震波研究方面已经被广泛采用^[16~18]。

本文采用 FDTD 算法计算了空气($\rho = 1.29\text{kg/m}^3$, $c_l = 340\text{m/s}$)中由钢管($\rho = 7890\text{kg/m}^3$, $c_l = 5780\text{m/s}$, $c_t = 3090\text{m/s}$)组成的二维周期正方点阵声子晶体的禁带特性。此结构易于实现, 且很具代表性^[2]。

* 收稿日期: 2004-03-06

基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(51307)

作者简介: 王刚(1975—), 男, 博士生。

1 模型与基本方程

图1所示为空气中二维周期钢管正方形阵列声子晶体结构的横截面图, z 方向垂直于纸面向上。黑色的部分为空气中平行于 z 轴周期排列的钢管, 其间距 a 被称为晶格常数。

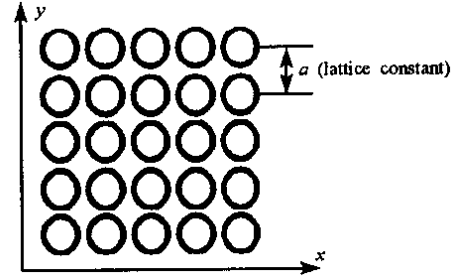


图1 二维声子晶体横截面图

Fig.1 Cross section of the two-dimensional phononic crystals

二维各向同性介质动态弹性方程为:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}; \\ \tau_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 (u_x, u_y) 为位移矢量, $(\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy})$ 为压应力和剪切应力, ρ 为密度; μ 和 λ 为拉梅常数。

假设初始时刻介质中任一点的应力和速度都为零, 此时应力和速度构成的波等价于应力应变波^[17], 由此, 用速度矢量 (v_x, v_y) 代替位移矢量 (u_x, u_y) , 可得到速度矢量表示的一阶双曲型波动方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

设 W 为速度和应力构成的向量, $W = (v_x, v_y, \tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy})^T$, 上式即:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3)$$

其中, 系数

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2 交错网格 FDTD 算法

由于 $O(2A)$ (两阶时间精度、四阶空间精度) 的 FDTD 方法在精度和计算时间上综合较优^[16], 所以文中采用的是 $O(2A)$ 的交错网格 FDTD 算法, 其具体实现如下:

首先将空间和时间离散化, $x = i\Delta x, y = j\Delta y, t = k\Delta t$ 。设 $r_x = \Delta t/\Delta x, r_y = \Delta t/\Delta y$; U, V, R, T, H 依次为向量 W 的各个分量 $v_x, v_y, \tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ 的离散值, 其中 $V_{i+\frac{1}{2}, j}^{k+\frac{1}{2}} = v_x[i\Delta x, j\Delta y, (k+1/2)\Delta t]$, 其它类同。

将偏微分方程离散化, 即可得到二维各向同性介质 $O(2A)$ 交错网格 FDTD 算法的递推公式如下:

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} &= U_{i,j}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{r_x}{\rho_{i,j}} \left[\alpha (R_{i+\frac{1}{2},j}^k - R_{i-\frac{1}{2},j}^k) + \beta (R_{i+\frac{3}{2},j}^k - R_{i-\frac{3}{2},j}^k) \right] \\ &\quad + \frac{r_y}{\rho_{i,j}} \left[\alpha (H_{i,j+\frac{1}{2}}^k - H_{i,j-\frac{1}{2}}^k) + \beta (H_{i,j+\frac{3}{2}}^k - H_{i,j-\frac{3}{2}}^k) \right] \\ V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} &= V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{r_x}{\rho_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \left[\alpha (H_{i+1,j+\frac{1}{2}}^k - H_{i,j+\frac{1}{2}}^k) + \beta (H_{i+2,j+\frac{1}{2}}^k - H_{i-1,j+\frac{1}{2}}^k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{r_y}{\rho_{ij}} [\alpha (T_{i+\frac{1}{2},j+1}^k - T_{i+\frac{1}{2},j}^k) + \beta (T_{i+\frac{1}{2},j+2}^k - T_{i+\frac{1}{2},j-1}^k)] \\
 R_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = & R_{i+\frac{1}{2},j}^k + r_x(\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2}} [\alpha (U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}})] \\
 & + r_y \lambda_{i+\frac{1}{2}} [\alpha (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}})] \\
 T_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} = & T_{i+\frac{1}{2},j}^k + r_x \lambda_{i+\frac{1}{2}} [\alpha (U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (U_{i+\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j}^{k+\frac{1}{2}})] + \\
 & r_y(\lambda + 2\mu)_{i+\frac{1}{2}} [\alpha (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{k+\frac{1}{2}})] \\
 H_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = & H_{i,j+\frac{1}{2}}^k + r_x \mu_{i,j+\frac{1}{2}} [\alpha (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})] \\
 & + r_y \mu_{i,j+\frac{1}{2}} [\alpha (U_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) + \beta (U_{i,j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - U_{i,j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})] \tag{5}
 \end{aligned}$$

其中 $\alpha = 9/8, \beta = -1/24$ 为空间差分系数。

U, V, R, T, H 如图 2 所示在空间上交错分布, U, V 和 R, T, H 在时间上交错分布, 构成了交错的空间和时间网格。

通过给定初始的 $k=0$ 时的 R, T, H 和 $k=-1/2$ 时的 U, V , 可以得到 $k=1/2$ 时的 U, V 继而得到 $k=1$ 时的 R, T, H ;。如此类推, 将会得到任意时刻任意点上的状态值。

比较文献 [14] 中的差分递推算法可以发现, 本文中的交错网格差分递推算法, 不需要进行任何插值处理, 减少了累计误差, 计算精度和速度都可以得到提高。

在用 FDTD 算法对声子晶体实际模型进行求解时, 总需要在有限的一个空间区域内进行计算。如果不对这个人为区域的边界进行特殊处理, 将会产生错误的波的反射。针对声子晶体的计算, 文献 [14] 采用了吸收边界条件和周期边界条件来进行处理, 但对于交错网格 FDTD 算法, 该方法使用很不方便。因此采用了文献 [18] 中的吸收边界条件, 这种边界条件的递推公式和交错网格 FDTD 算法的递推公式形式相同, 实现容易且计算量增加不大。

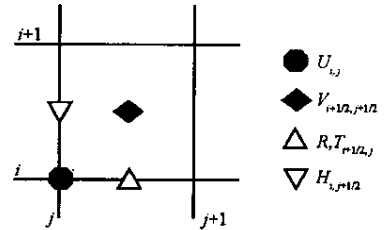


图 2 交错网格 FDTD 算法计算格点分布
Fig. 2 The distributing of the calculation grid in the staggered grid FDTD method

为了保证算法的稳定性, 常采用电磁波 FDTD 算法中常用的稳定性判据^[19], 即:

$$\Delta t \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \leq 0.5 \tag{6}$$

其中, 速度 c 为计算对象中弹性波最快的传播速度。

但针对本文中的计算对象, 空气和钢的密度相差 6000 多倍, 声速也相差 10 多倍。如果选用上述稳定性判据, 将会在空气与钢之间的界面上产生不合理的强烈振荡, 造成严重的算法不稳定现象, 算法振荡并发散, 不能得到正确的结果。通过多次尝试, 我们发现, 通过降低时间步长 Δt 可以使这一问题得到解决, 即选用如下稳定性判据:

$$\Delta t \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \leq \frac{0.5}{\eta} \tag{7}$$

对于空气/金属界面, 选用 $\eta \geq 18$ 可保证 FDTD 算法的稳定性。

为了得到声子晶体的传输特性, 可以在计算区域的一端赋予冲击激励的初始值:

$$v_x = A \sin(\omega t) e^{-Bx} \tag{8}$$

其中 A 和 B 为常数, 选取合适的 B 产生足够窄的激励, 使其入射波的平直频谱足够宽(大于要分析的频率范围)。

通过计算得到计算区域另一端附近的速度随时间变化的函数关系, 再将其变换到频域, 与初始激励频谱作比较, 即可得到声子晶体的弹性波传输特性。

3 实例计算及测试结果

采用文中的交错网格 FDTD 算法,对 10×10 周期钢管正方阵列声子晶体的带隙特性进行了理论计算。其中,晶格常数 $a = 103\text{mm}$,钢管外径 $d = 28.5\text{mm}$,管壁厚 1.4mm ,计算区域为 $1500\text{mm} \times 1500\text{mm}$,正方阵列位于计算区域的正中,边界上使用吸收边界条件。在计算区域的一边施加波振面垂直于正方阵列表面的平面波冲击函数激励,计算得到的 $[1\ 0]$ 方向(也即 $\Gamma - X$ 方向)入射时声子晶体中心位置的声压传函如图 3(a)所示。

同时,在 $7.20\text{m} \times 5.20\text{m} \times 4.40\text{m}$ 的全消声室内对上述结构与尺寸的声子晶体进行了声学测试,测试系统参见图 4 $[1\ 0]$ 方向入射时声子晶体中心位置的声压传函的测试结果如图 3(b)所示。

测试中,被测声子晶体由按 10×10 周期悬挂在间距为 103mm 的十字形金属网上的 100 根外径 28.5mm 、管壁厚 1.4mm 、长 1.2m 的钢管组成,声源为声望公司的 SWA-1-20 型功率放大器的配套音箱,音箱距被测声子晶体表面 2m 以上,以保证入射声波为近似的垂直入射平面波;信号的采集与分析由丹麦 B&K 公司的 4190L 型自由场声传感器和 2669 L 型前置放大器及其配套的 Pulse 分析仪完成。如图 4 所示,传感器 A 布置在声源和声子晶体之间,各间距 1m 左右,测量输入声压;传感器 B 依次随机布置在被测声子晶体的中心位置附近,通过多次测量取平均值得到输出声压,以减少复杂的声波衍射、绕射等对测量结果的影响。通过扫频测量方式,得到声子晶体中心位置声压相对于输入声压的传函。

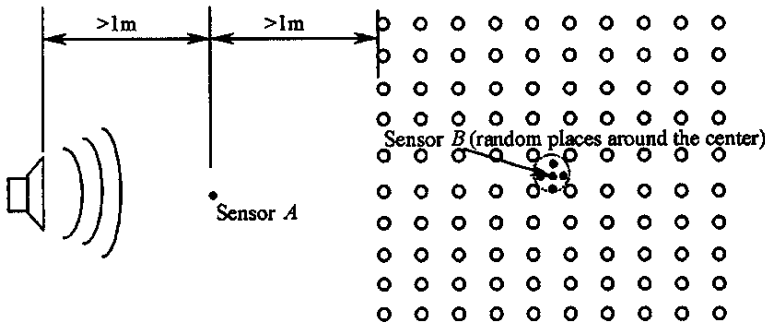


图 4 二维声子晶体声学测试图

Fig. 4 Acoustic measurement of the 2D phonic crystals

图 5 所示为计算得到的 $\Gamma - X$ 方向带结构及其态密度,通过比较可以看出 (a) 本文中所计算的声子晶体结构在 $0 \sim 3500\text{Hz}$ 频段,在 $[1\ 0]$ 方向上有一个禁带,为 $1495 \sim 1740\text{Hz}$,禁带频率范围的声波传播有很大的衰减 (b) 本文中交错网格 FDTD 算法计算结果和测试结果吻合较好,但带隙宽度上存在一定误差,这是由于一方面测试不可避免地受到复杂的绕射、衍射声场沿平行钢管方向传播的影响,另一方面,计算得到的是 $[1\ 0]$ 方向的方向禁带,而测试中周围声场从各个方向的入射使得测试结果禁带变窄 (c) 交错网格 FDTD 算法能够很好地描述声子晶体的带隙特性和带结构计算结果十分吻合。

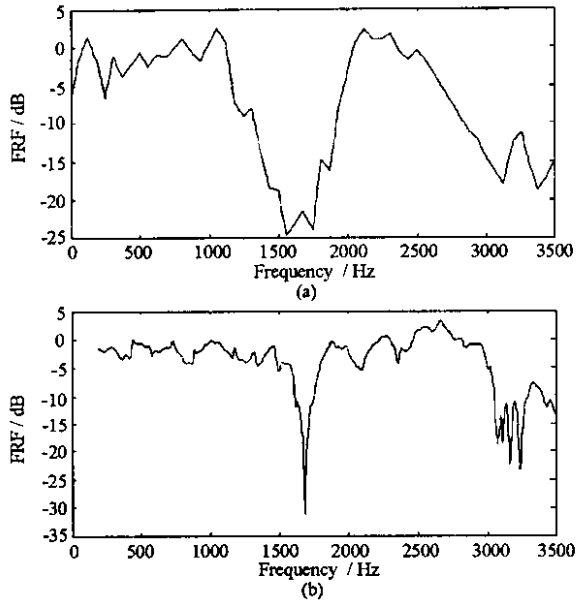


图 3 (a) 计算及 (b) 测试得到的 $[1\ 0]$ 方向声子晶体中心位置声压频响函数

Fig. 3 (a) Calculated and (b) measured frequency response functions (FRF) of the phonic crystals along the direction of $[1\ 0]$

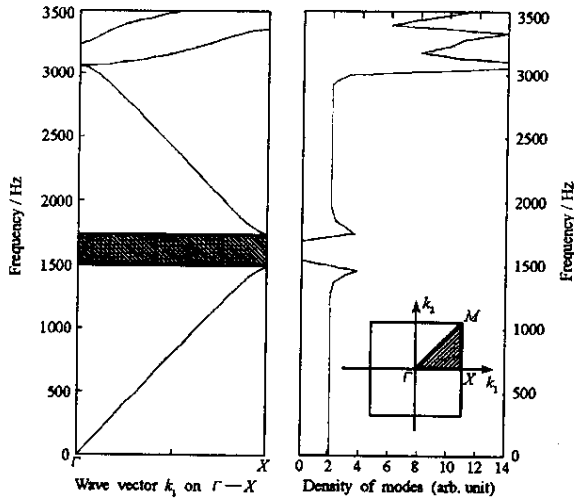


图5 声子晶体 $\Gamma-X$ 方向带结构(图左)及其态密度(图右)

Fig.5 Band structure on $\Gamma-X$ (left) and the state density (right) of the phononic crystals

4 结论

本文通过修正 FDTD 算法的算法稳定性判据,调整离散时间间隔,解决了大密度、弹性常数差的情况下的交错网格 FDTD 算法的不稳定的问题,并将其成功地应用到大密度、弹性常数差的钢/空气组分二维声子晶体带隙特性计算上来,其理论计算结果和试验结果吻合得比较理想,而且这种方法可以成功地应用于固体与固体、液体与液体、固体与液体组成的声子晶体结构的带隙特性计算。与其它声子晶体带隙特性的计算方法相比,FDTD 算法可以形象直观地描述声子晶体中声波/弹性波的波场变化全过程,这一突出的特点将使其对声子晶体带隙产生机理的揭示起到重要的作用。

参考文献:

- [1] Vasseur J O, Deymier P A, Chenni B, et al. Experimental and theoretical evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional solid phononic crystals [J]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86(14): 3012-3015.
- [2] Kushwaha M S. Stop-bands for periodic metallic rods: Sculptures that can filter the noise [J]. Appl. Phys. Lett., 1997, 70(24): 3218-3220.
- [3] Kushwaha M S. Giant acoustic stop bands in two-dimensional periodic arrays of liquid cylinders [J]. Appl. Phys. Lett., 1996, 69(1): 31-33.
- [4] Kushwaha M S, Halevi P. Band-gap engineering in periodic elastic composites [J]. Appl. Phys. Lett., 1994, 64(9): 1085-1087.
- [5] Kushwaha M S, Halevi P, et al. Theory of acoustic band-structure of periodic elastic composites [J]. Phys. Rev. B, 1994, 49(4): 2313-2322.
- [6] Kushwaha M S, Halevi P, et al. Acoustic band-structure of periodic elastic composites [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 71(13): 2022-2025.
- [7] Liu Z Y, et al. Elastic wave scattering by periodic structures of spherical objects: theory and experiment [J]. Phys. Rev. B, 2000, 62(4): 2446-2457.
- [8] Liu Z Y, et al. Locally resonant sonic materials [J]. Science, 2000, 289(8): 1734-1736.
- [9] Modinos A, et al. On wave propagation in inhomogeneous systems [J]. Physica B, 2001, 296: 167-173.
- [10] Kafesaki M, Penciu R S, Economou E N. Air bubbles in water: a strongly multiple scattering medium for acoustic waves [J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(26): 6050-6053.
- [11] Kafesaki M, Economou E N. Multiple-scattering theory for three-dimensional periodic acoustic composites [J]. Phys. Rev. B, 1999, 60(17): 11993-12001.
- [12] Vasseur J O, et al. Phononic crystal with low filling fraction and absolute acoustic band gap in the audible frequency range: a theoretical and experimental study [J]. Phys. Rev. E, 2002, 65(5): 6608-6613.
- [13] García-Pablos D, et al. Theory and experiments on elastic band gaps [J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(9): 4349-4352.
- [14] Kafesaki M, Sigalas M M, García N. The finite difference time domain method for the study of two-dimensional acoustic and elastic band gap materials [C]. Conference on photonic crystals and light localization in the 21st century, 2001.
- [15] 王刚, 温激鸿, 韩小云, 赵宏刚. 二维声子晶体带隙计算中的时域有限差分方法 [J]. 物理学报, 2003, 52(8): 1943-1947.
- [16] Johan O A R, et al. Viscoelastic finite-difference modeling [J]. Geophysics, 1994, 59(9): 1444-1456.
- [17] Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method [J]. Geophysics, 1986, 51(4): 889-901.
- [18] 董良国. 弹性波数值模拟中的吸收边界条件 [J]. 石油地球物理勘探, 1999, 34(1): 45-56.
- [19] 冯祖伟. 时域有限差分方法在天线和微波技术中的应用 [J]. 现代雷达, 1997, 19(1): 41-53.

