

空气中正方形排列的大声阻抗柱体阵列的声波禁带*

赵宏刚,刘耀宗,韩小云,温激鸿,王刚,郝殿龙

(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南长沙 410073)

摘要:采用平面波展开法,分析了一类声阻抗较大的圆柱体正方形周期排列在空气中形成的二维声子晶体声波禁带。数值计算结果表明,在柱体声阻抗远大于基体的条件下,声波禁带与柱体材料及其是否空心无关,而与柱体半径和晶格常数有关。

关键词:声子晶体;声波禁带;基体;晶格常数

中图分类号: O481.1;TB52 **文献标识码:** A

Phononic Band Gaps for Two-dimensional Square Array of the Large Acoustic Impedance Cylinders in Air

ZHAO Hong-gang, LIU Yao-zong, HAN Xiao-yun, WEN Ji-hong, WANG Gang, YU Dian-long

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The band gaps of the two-dimensional phononic crystal composed of square array of cylinders in air are analyzed by the plane-wave expansion (PWE) method. The numerical result shows that the band gaps are independent of the physical parameter of the scatter if the acoustic impedance of the scatter is much greater than that of the matrix. So the band gaps are determined by the radius of the cylinders and the lattice constant. It doesn't matter whether the cylinders are hollow or not.

Key words: phononic crystal; phononic band gaps; matrix; lattice constant

近年来,考虑到声波和光波在波动性上存在共性,在光子晶体研究的基础上,声子晶体的研究受到各国研究机构的普遍关注。声子晶体的研究不仅具有理论价值,即把各向异性介质中波的散射和局域现象在经典波中统一起来,更重要的是声子晶体在声学功能器件,如声滤波器、声波导、声变速器以及振动和噪声控制方面有着广泛的应用前景。1995年,R. Martinez-Sala等针对西班牙Madrid市名为“流动的旋律”的雕塑,测试了其声衰减特性^[1],首次在实验上证实声波禁带的存在。随后,J. V. Sanche-Perez等在消声室对“缩微雕塑”的声波禁带进行了测试^[2],结果表明,若改变散射体的数量,声衰减峰值高低有变化,但禁带位置基本保持不变。2002年,J. O. Vasseur通过理论计算和实验测试,研究了正方形排列的铜管/空气二维声子晶体的声波禁带^[3]。结果表明,不管铜柱是空心还是实心的, $\Gamma-X$ 方向最低禁带均在4~8.8kHz的频率范围内。以上研究工作均是针对一种或几种材料得出的结论,缺乏一般性。本文从散射体与基体的声组抗对比出发,首先对正方形排列的不锈钢/空气二维声子晶体实际模型进行简化,并采用平面波展开法计算了此二维声子晶体声波禁带,算法的有效性得到实验结果的验证;然后通过分析和算例说明,在散射体声组抗远大于基体的条件下,声波禁带与散射体材料无关。

1 平面波展开法

在笛卡尔坐标系中,建立二维声子晶体的理论模型如下:以圆柱体(即散射体)轴向为 Z 轴,且柱体无限长;以圆柱体横截面为 XY 平面,无穷多柱体在 XY 平面周期排列,柱体可中空或实心。图1描述了不锈钢管正方形排列在空气中形成的二维声子晶体部分横截面,其中 a 称为晶格常数,不锈钢管外径为 R ,右图阴影部分表示第一简约布里渊区。

* 收稿日期:2004-02-20
基金项目:国家重点基础研究发展规划资助项目(51307)
作者简介:(1977-)男,博士生。

目前,PWE法在计算固/固体系、液(气)/液(气)体系二维声子晶体的能带结构时是比较精确的^[5-8],但该方法在计算固/液(气)体系的二维声子晶体时,由于液体(气体)中只存在纵波,而固体中既存在纵波也存在横波,所以必须进行适当的近似处理。文献[3,9]采用以下近似方法:认为固体刚度无限大,即不可压缩,则声波不传入固体中,声波的传播只在空气中进行。从声阻抗的角度看,以上论文中的研究对象共有的特点是柱体声阻抗远大于空气,这就意味着柱体内部压强只是柱体与空气分界面处压强的静态传递,并不存在疏密交替的声压,即内部质点并没有因空气质点的冲击而运动,所以并没有声波传播^[4]。在实际计算时,如果简化为全固相处理,即把空气看成剪切模量为零的“固体”,由于“零”剪切模量有限的富里叶级数不收敛,所以不管怎么增加平面波数目,PWE算法都无法收敛。由于散射体的声阻抗远大于基体,所以可以把散射体用与之具有相同密度和纵波速度的液柱代替(阻抗等价近似),采用液/气体系二维声子晶体的波动方程求解。声波在液、气介质中传播时只有纵波,描述其内部声波传播的波动方程如下式:

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla[\lambda(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{u}] \tag{1}$$

其中,弹性模量 $\lambda = \rho C_l^2$, ρ 为密度, C_l 材料纵波速度, \mathbf{r} 为坐标矢量。此时,通过定义一个标量势 $\Phi(\mathbf{r}, t)$,它与位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 的关系是

$$\rho \mathbf{u} = \nabla \Phi \tag{2}$$

可把(1)式化为:

$$\left(\frac{1}{\lambda(\mathbf{r})}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r})}\right) \nabla \Phi\right) \tag{3}$$

根据 Bloch 定理,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \sum_{\mathbf{G}} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}) e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \tag{4}$$

其中, \mathbf{k}, \mathbf{G} 均是倒格矢, ω 为声波角频率。由于二维声子晶体的结构具有周期性,所以 $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$ 及材料密度、弹性常数的倒数 $\rho(\mathbf{r})^{-1}$ 和 $\lambda(\mathbf{r})^{-1}$ 可二维傅里叶展开,把展开结果代入(3)式,可得:

$$\sum_{\mathbf{G}} \rho_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}^{-1} (\mathbf{K} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{K} + \mathbf{G}') - \lambda_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}^{-1} \omega^2 \Phi(\mathbf{G}') = 0 \tag{5}$$

方程(5)实质是液/气体系二维声子晶体波动方程的本征值求解方程,这是一个依赖于倒格矢 \mathbf{G}, \mathbf{G}' 的无穷维线性方程,在实际计算中只能通过有限数目的倒格矢来逼近。本文在计算时根据计算精度的要求,取 289 个倒格矢,则(5)式变成 289×289 的线性方程组。在第一简约布里渊区(见图 1)给定一个波矢 \mathbf{k} ,求解该线性方程组,所得的本征值记为 ω_{nk} ($n = 1, 2, 3, \dots, n$ 一般称为能带指标);当 \mathbf{k} 沿第一布里渊区边界取不同的波矢时,就可求得一组本征值。此时,以波矢 \mathbf{k} 为横坐标,以这组本征值为纵坐标,就可得到二维声子晶体的能带结构。

2 结果及讨论

2.1 不锈钢/空气二维声子晶体的声波禁带

图 2 给出不锈钢/空气二维声子晶体的理论计算和实验测试结果。图 2(a) 表示由 PWE 法计算得到的正方形周期排列的不锈钢柱/空气二维声子晶体能带结构,不锈钢柱半径 1.425cm,晶格常数 10.3cm,材料参数见表 1。计算结果表明,该二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向声波禁带的频率范围为 1485 ~ 1739Hz。图 2(b) 为插入损失描述的 $\Gamma-X$ 方向禁带测试结果。测试对象由空气中正方形周期排列的 10×10 不锈钢管阵列形成,管外径和晶格常数分别与 PWE 法计算时的钢柱半径和晶格常数相同,壁厚 0.042cm,

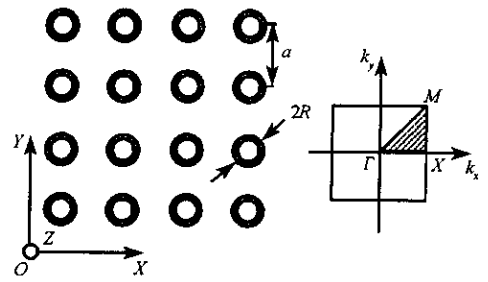


图 1 不锈钢管正方形排列在空气中形成的二维声子晶体部分横截面

Fig. 1 Cross-section of the 2D phononic crystal composed of square arrays of periodic hollow stainless steel cylinders in the air

管长 1.2m。从图 2(b) 可看出, $\Gamma-X$ 方向禁带出现在 1650~1920Hz 间, 最大插入损失, 即对声波的衰减最大出现在 1692Hz 处, 与理论计算所得的中心频率(1612Hz) 的误差为 4.7%, 两者吻合较好。这是由于不锈钢的声阻抗远大于空气(见表 1), 导致不锈钢管内部的空气感受不到外界空气的波动, 所以理论上实心 and 空心的不锈钢柱在无穷尺度下会产生相同的声波禁带。而在实际中, 作为测试对象的不锈钢管不可能无限长, 也不可能取无数根, 所以测试结果与计算结果间存在一定的偏差。从另一方面看, 测试与计算结果基本吻合说明, 采用各维尺度均无限大的实心钢柱/空气二维声子晶体模型, 使用平面波展开法能够合理计算实际有限尺度的不锈钢管/空气(不锈钢管必须有一定长度)二维声子晶体声波禁带。

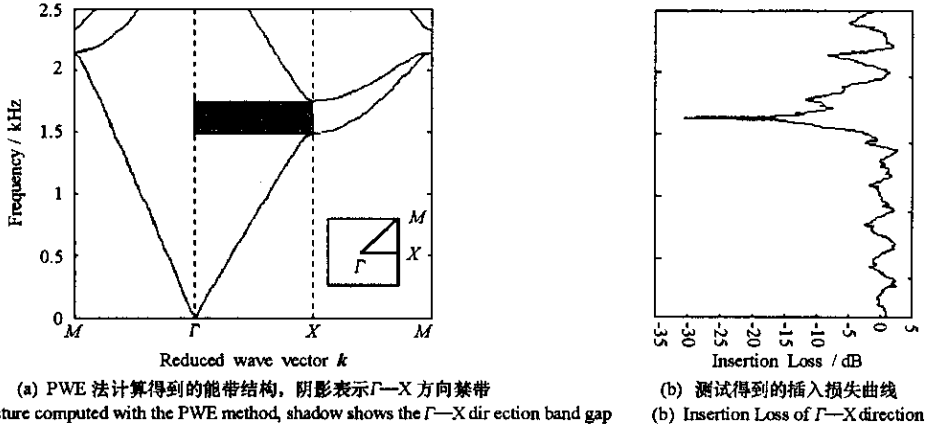


图 2 晶格常数为 10.3cm 时不锈钢/空气二维声子晶体的声波禁带

Fig.2 Band gap of 2D stainless steel/air with 10.3cm square lattice

表 1 材料声学参数

Tab.1 Material acoustical parameters

材料	密度($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	纵波速度($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	横波速度($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)	声阻抗($10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$)
不锈钢	7890	5780	3090	45 604.2
钨	19 300	5090	2800	98 240
天然橡胶	1300	1540	800	2000
水银	13 500	1450	-	19 580
水	1000	1480	-	1480
空气	1.29	340	-	0.4386

2.2 大声阻抗散射体/空气二维声子晶体的声波禁带

据以上研究结果可推测出, 对于散射体声阻抗远大于基体的二维声子晶体来说, 散射体材料参数对这类声子晶体能带结构的影响不大。为了验证这一推测, 选择一组声阻抗大于水(水的声阻抗远大于空气^[4])的材料作为散射体, 分析它们以相同的结构参数排列在空气中形成的二维声子晶体的禁带特性。为了便于与 2.1 的结果相比较, 在使用 PWE 法计算这些二维声子晶体的能带结构时, 散射体均取半径为 1.425cm 的圆柱, 晶格常数分别取 10.3cm 和 6.4cm, 计算得到的各二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向最低禁带边界频率在表 2 中列出。

表2 几种典型二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向最低禁带边界频率Tab.2 The lowest $\Gamma-X$ direction band gaps of some 2D phononic crystal with lattice constant 10.3cm and 6.4cm

	各晶格常数下的禁带边界(Hz)	
	10.3cm	6.4cm
水/空气	1487.5 ~ 1739.9	2116.0 ~ 2977.5
水银/空气	1485.4 ~ 1739.6	2116.0 ~ 2977.5
天然橡胶/空气	1484.9 ~ 1739.3	2116.0 ~ 2977.4
钨/空气	1484.6 ~ 1739.3	2114.0 ~ 2977.2
不锈钢/空气	1484.6 ~ 1739.3	2114.0 ~ 2977.5

从表2可看出,在晶格常数分别为10.3cm和6.4cm时,各二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向最低禁带边界频率变化幅度不超过4Hz,表明在同一晶格常数下,各二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向声波禁带基本相同,而且它们的能带结构也基本相同。例如在晶格常数为10.3cm时,它们的能带结构与不锈钢柱/空气二维声子晶体的能带结构基本相同(见图1)。

表3 几种典型二维声子晶体的完全禁带

Tab.3 The complete band gaps of some 2D phononic crystal

	最低完全禁带(Hz)	第二完全禁带(Hz)	第三完全禁带(Hz)
水/空气	4246 ~ 8524	27278 ~ 28164	31279 ~ 32915
水银/空气	4230 ~ 8515	27256 ~ 28139	31260 ~ 32895
天然橡胶/空气	4242 ~ 8522	27273 ~ 28158	31275 ~ 32910
钨/空气	4230 ~ 8515	27255 ~ 28138	31259 ~ 32894
不锈钢/空气	4231 ~ 8515	27257 ~ 28141	31261 ~ 32896
铜/空气	4231 ~ 8515	27257 ~ 28140	31261 ~ 32896

以上考察了二维声子晶体 $\Gamma-X$ 方向禁带,下面进一步研究这些二维声子晶体的完全禁带。为了便于比较并检验数值计算的可靠性,采用与文献[3]中的研究对象——铜柱/空气二维声子晶体相同的结构尺寸,散射体正方形排列,晶格常数3cm,半径1.4cm。这些二维声子晶体前三个完全禁带边界频率在表3中列出。从中可看出,对不同散射体来说,各二维声子晶体前三个完全禁带频率基本相同。其中最低完全禁带边界频率只有十几赫兹的变化。不仅如此,表3中各二维声子晶体的能带结构也基本相同,这里仅比较不锈钢/空气(图左)与文献[3]中铜/空气(图右)的能带结构,如图3所示,图中阴影表示完全禁带。这是由于散射体的声阻抗远大于基体,所以在相同晶格常数和散射体半径的条件下,该类声子晶体中声波的传播具有基本相同的形式,从而会形成几乎相同的能带结构,导致声波禁带也基本相同。

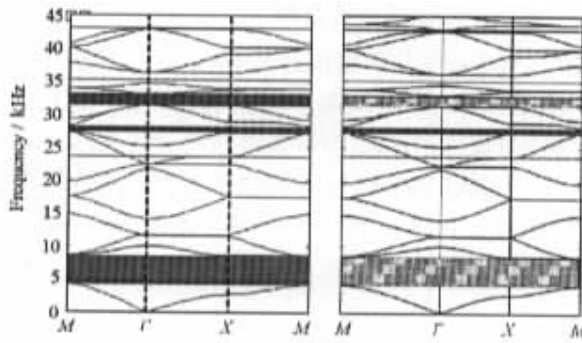


图3 相同结构尺寸下不锈钢管/空气(左)铜管/空气(右)二维声子晶体的能带结构

Fig.3 Band Structure of stainless steel(left) and cuprum(right) cylinder square lattice

