

渐开线球齿轮齿廓曲面方程的推导*

潘存云, 温熙森

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

摘要 :介绍了一种新发明的球齿轮机构,建立了新型球齿轮齿廓曲面的参数方程。推导了渐开线齿廓曲线的通用表达式,对其进行旋转变换得到了球齿轮机构中齿轮的环形齿面方程。利用双自由度啮合理论,进一步推导出新型球齿轮的啮合方程,最后推导出渐开线球齿轮共轭齿廓曲面方程。理论结果证明了渐开线环面齿廓的共轭齿廓曲面仍然是渐开线环面。

关键词 :机构学;球齿轮传动;渐开线;齿面方程

中图分类号 :TH132.41 文献标识码 :A

Profile Formule Derivation of the Involute Spherical Gears

PAN Cun-yun, WEN Xi-sen

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :A new spherical gear mechanism is introduced. Surface formule of the new mechanism is deduced. This paper first deduces the general formules of involute, and transforming these formulas by rotation matrix, the surface formule of the new spherical gear has been found. Based on the theory of double degree freedom, the action formule of the two spherical gears is deduced, and furthermore, the surface formule of the conjugate teeth profiles is deduced as well. The results proves that the conjugate teeth profile of the ringed involute spherical gear is also the profile of the ringed involute spherical gear.

Key words :mechanism; spherical gear transmission; involute; surface formule

图 1 所示的渐开线球齿轮是本文作者的一项职务发明,由于这种新型球齿轮传动能实现精确的球面运动且加工工艺相对简单,因而从根本上克服了传统的以 Trallfa 离散齿^[1,2]为代表的球齿轮传动存在的不足^[3,4]。问题之一是按上述方法形成的新型球齿轮,其齿廓曲面参数方程形式如何?其次是当其中一个球齿轮的齿廓曲面为渐开线环面时,与之相配的另一球齿轮的共轭齿廓曲面是不是仍为渐开线环面?本文推导的结论是肯定的。

1 齿廓曲面 Σ_1 的参数方程

从文献 [1] 可知,渐开线环形齿球面齿轮是由直齿圆柱齿轮演变而来的,其齿廓曲面方程必然与直齿圆柱齿轮的齿廓曲线有关。对于直齿圆柱齿轮,建立坐标系如图 (x_a) 所示。由渐开线的性质可知,在坐标系 $y_0 - x_0$ 中,渐开线的参数方程如下:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= r_b(\sin u - u \cos u) \\ y_{10} &= r_b(\cos u + u \sin u) \\ z_{10} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, $u = \theta_k + \alpha_k$ 称为滚动角, $\theta_k = \tan \alpha_k - \alpha_k$ 称为渐开线的展角, α_k 为渐开线在 k 点处的压力角, r_b 为基圆半径。

而在坐标系 $y - x$ 中,渐开线的参数方程由以下变换得到:

* 收稿日期:2003-10-20
基金项目:国家自然科学基金资助项目(59675063、59275159)
作者简介:潘存云(1955—),男,教授,博士。

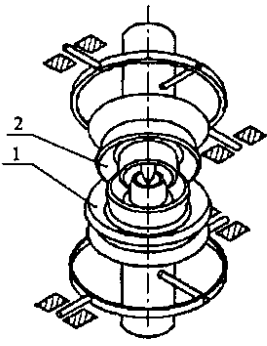


图1 渐开线环面球齿轮机构

Fig.1 The ringed involute spherical gear mechanism

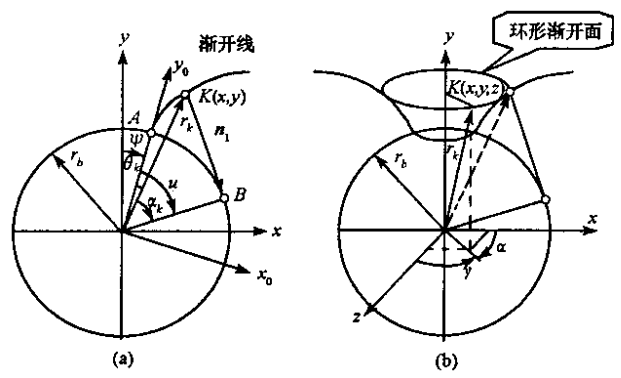


图2 新型球齿轮的坐标系

Fig.2 Coordinate system of new mechanism

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(z, \Psi) \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_b [\sin(\theta_k + \alpha_k + \Psi) - (\theta_k + \alpha_k) \cos(\theta_k + \alpha_k + \Psi)] \\ r_b [\cos(\theta_k + \alpha_k + \Psi) + (\theta_k + \alpha_k) \sin(\theta_k + \alpha_k + \Psi)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 Ψ 是球心到齿廓渐开线在基球上的起始点向径与极轴之间的夹角。

以上各式中的 Ψ 可由图3求得。



图3 (a)中凹齿轮 (b)中凸齿轮

Fig.3 (a) Concave gear (b) Convexity gear

对于中凹球齿轮 如图3(a)有：

$$\Psi = i \cdot \varphi + \delta_1 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

其中相邻轮齿所夹中心角为：

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{z_{v1}} \\ \delta_1 &= \frac{\angle coc}{2} = \left(\varphi - \frac{S_b}{r_b} \right) / 2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi}{z_{v1}} - \frac{\cos \alpha \left(\frac{\pi m}{2} + m z_{v1} \operatorname{inv} \alpha \right)}{\frac{m z_{v1}}{2} \cos \alpha} \right] \\ &= \frac{\pi}{2 z_{v1}} - \operatorname{inv} \alpha \end{aligned}$$

将 φ 和 δ_1 代入式(3)得：

$$\Psi = \frac{\pi}{z_{v1}} (2i + 0.5) - \operatorname{inv} \alpha \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

其中 z_{v1} 为球齿轮的当量齿数。

对于中凸球齿轮 如图 3(b) 有:

$$\Psi = i \cdot \varphi - \delta_2 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

其中 $\delta_2 = (\varphi - 2\delta_1)/2 = \frac{\pi}{z_{v1}} + \text{inv}\alpha$

将 δ_2 代入式 (5) 得:

$$\Psi = \frac{\pi}{z_{v1}}(2i - 1) - \text{inv}\alpha \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

将上述渐开线绕极轴旋转一周则得到球齿轮的渐开线环形曲面。建立坐标系如图 3(b) 所示, 其中 y 为极轴。易知, 过坐标轴 y 的平面族与环面齿廓的截交线为标准渐开线, 所有这些渐开线的集合构成了球齿轮的环形齿廓曲面。该齿廓曲面的参数方程如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= R(\gamma) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_b[\sin(u + \Psi) - u\cos(u + \Psi)]\cos\gamma \\ r_b[\sin(u + \Psi) - u\cos(u + \Psi)] \\ -r_b[\cos(u + \Psi) + u\sin(u + \Psi)]\sin\gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

写成矢量方程的形式有:

$$\mathbf{R}_1 = x\sin\gamma\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\cos\gamma\mathbf{k} \quad (8)$$

由渐开线的性质可知, 其法矢量的方程为:

$$\mathbf{n} = \cos(\Psi + u)\mathbf{i} - \sin(\Psi + u)\mathbf{j} \quad (9)$$

绕极轴旋转后所得渐开线环面的法矢量为:

$$\mathbf{n} = \cos(\Psi + u)\sin\gamma\mathbf{i} - \sin(\Psi + u)\mathbf{j} + \cos(\Psi + u)\cos\gamma\mathbf{k} \quad (10)$$

2 坐标系及其变换^[5]

为了求齿轮 2 的齿廓曲面方程 Σ_2 , 建立坐标系如图 4(a) 所示, 其中 $C_{10}(o_1, x_{10}, y_{10}, z_{10})$ 与 $C_{20}(o_2, x_{20}, y_{20}, z_{20})$ 为固定坐标系, $C_1(o_1, x_1, y_1, z_1)$ 和 $C_2(o_2, x_2, y_2, z_2)$ 为与球齿轮固联在一起的动坐标系。图 4(b) 为主动球齿轮偏转任意角度 θ_1 后的新位置。为研究方便, 将其简化成图 4(c) 所示坐标系的形式。由于 θ_1 与 θ_2 具有如下关系:

$$\theta_2 = -i\theta_1$$

为了简便起见, 在以下分析中去掉其中的下标, 定义齿轮 1 的偏摆角为 θ 。

齿轮 1 绕固定坐标系 x 轴、 z 轴的角速度分别是 ω'_1 、 ω''_2 , 合成角速度 ω_1 , 其方向沿 $\overrightarrow{N_1N_1}$, 与 x 轴的夹角 α 有如下关系:

$$\tan\alpha = \omega'_1/\omega''_1 \quad (11)$$

齿轮 1 绕任意轴 $\overrightarrow{N_1N_1}$ 转动 θ 角, 齿轮 2 绕平行于 $\overrightarrow{N_1N_1}$ 的轴线 $\overrightarrow{N_2N_2}$ 转动 $-i\theta$ 角。由文献 [2] 可知, 动坐标系 C_1 、 C_2 与固定坐标系 C_{10} 、 C_{20} 之间有如下变换关系式:

$C_1 - C_{10}$:

$$[C_1^\theta] = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha(1 - \cos\theta) + \cos\theta & -\cos\alpha \cdot \sin\theta & \cos\alpha\sin\alpha(1 - \cos\theta) \\ \cos\alpha \cdot \sin\theta & \cos\theta & -\sin\alpha \cdot \sin\theta \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (1 - \cos\theta) & \sin\alpha \cdot \sin\theta & \cos^2\alpha \cdot (1 - \cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$C_2 - C_{20}$:

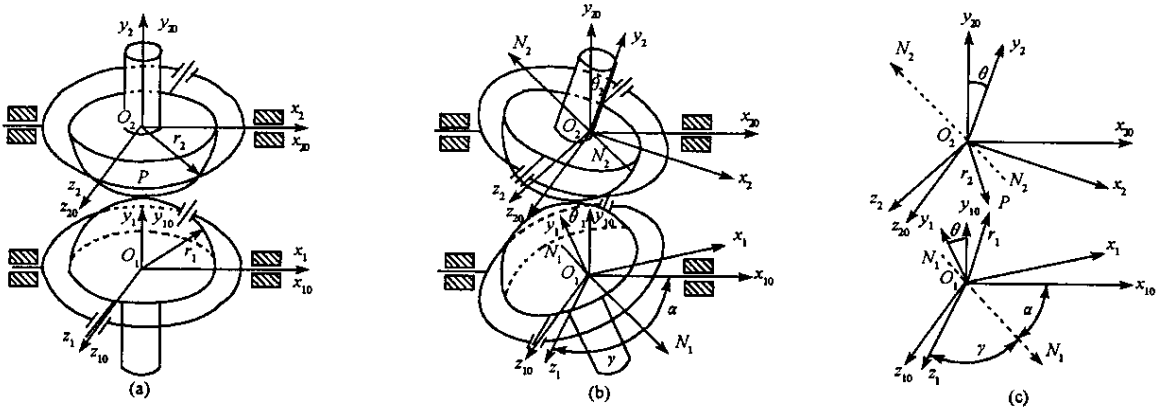


图4 球齿轮机构的坐标系

Fig.4 Coordinate System of spherical gear mechanism

$$[C_2^{-i\theta}] = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha[1 - \cos(i\theta)] + \cos(i\theta) & \cos\alpha \cdot \sin(i\theta) & \cos\alpha \sin\alpha[1 - \cos(i\theta)] \\ -\cos\alpha \cdot \sin(i\theta) & \cos(i\theta) & \sin\alpha \cdot \sin(i\theta) \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot [1 - \cos(i\theta)] & -\sin\alpha \cdot \sin(i\theta) & \cos^2\alpha \cdot [1 - \cos(i\theta)] + \cos(i\theta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

3 啮合方程

齿轮 1 转动的角速度 ω_1 为：

$$\omega_1 = \omega'_1 + \omega''_1 = \omega'_1 i_1 + \omega''_1 k_1 \quad (14)$$

角速度 ω_1 也可以在坐标系 C_1 中表示为：

$$\omega_1 = \omega_{x1} i_1 + \omega_{y1} j_1 + \omega_{z1} k_1 \quad (15)$$

即：

$$\begin{bmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{bmatrix} = C_1^{-\theta} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ 0 \\ \omega''_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

把(12)式中的 θ 都换成 $-\theta$,代入上式可得：

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x1} &= [\sin^2\alpha(1 - \cos\theta) + \cos\theta] \omega'_1 + \cos\alpha \sin\alpha(1 - \cos\theta) \omega''_1 \\ \omega_{y1} &= [-\cos\alpha \sin\theta \omega'_1 + \sin\alpha \sin\theta \omega''_1] \\ \omega_{z1} &= \cos\alpha \sin\alpha(1 - \cos\theta) \omega'_1 + [\cos^2\alpha(1 - \cos\theta) + \cos\theta] \omega''_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

同理有：

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{o_2 o_1} = a_{x1} i_1 + a_{y1} j_1 + a_{z1} k_1 = -Aj \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = C_1^{-\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ -A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

展开可得：

$$\left. \begin{aligned} a_{x1} &= -A \cos\alpha \sin\phi \\ a_{y1} &= -A \cos\phi \\ a_{z1} &= A \sin\alpha \sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

两齿轮的传动比为 i 、齿轮 2 的角速度为 ω_2 ,有

$$\omega_2 = -i\omega_1$$

相对角速度为

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 = (1 + i)\omega_1 \quad (21)$$

齿廓曲面 Σ_1 和 Σ_2 在接触点 P 处的相对速度矢量 V_{12} 为：

$$V_{12} = \omega_{12} \times R_1 - \omega_2 \times A = \omega_1 \times [(1+i)R_1 + iA] \quad (22)$$

把(8)(15)(20)(21)式代入上式并简化得：

$$V_{12} = \omega_1 P + \omega_2 Q \quad (23)$$

这里 P 以及 Q 分别为：

$$\left. \begin{aligned} P &= p_x i_1 + p_y j_1 + p_z k_1 \\ Q &= q_x i_1 + q_y j_1 + q_z k_1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x &= -\cos\alpha \cdot \sin\theta \cdot [(1+i)x \cdot \cos\gamma + Ai \sin\alpha \cdot \sin\theta] + \cos\alpha \sin\alpha (1 - \cos\theta) \cdot [(1+i)y - Ai \cos\theta] \\ p_y &= -[\sin^2\alpha (1 - \cos\theta) + \cos\theta] [(1+i)x \cdot \cos\gamma + Ai \sin\alpha \cdot \sin\theta] \\ &\quad + \cos\alpha \sin\alpha (1 - \cos\theta) \cdot [(1+i)x \cdot \sin\gamma - A \cos\alpha \cdot \sin\theta] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$p_z = \cos\alpha \cdot \sin\theta \cdot [(1+i)x \cdot \sin\gamma - A \cos\alpha \cdot \sin\theta] + [\sin^2\alpha (1 - \cos\theta) + \cos\theta] [(1+i)y - Ai \cos\theta]$$

$$q_x = \sin\alpha \cdot \sin\theta \cdot [(1+i)x \cdot \cos\gamma - Ai \sin\alpha \cdot \sin\theta] - [\cos^2\alpha (1 - \cos\theta) + \cos\theta] [(1+i)y - Ai \cos\theta]$$

$$\left. \begin{aligned} q_y &= -\cos\alpha \cdot \sin\theta \cdot (1 - \cos\theta) \cdot [(1+i)x \cdot \cos\gamma + Ai \sin\alpha \cdot \sin\theta] \\ &\quad + [\cos^2\alpha (1 - \cos\theta) + \cos\theta] [(1+i)x \cdot \sin\gamma - A \cos\alpha \cdot \sin\theta] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$p_z = \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \cos\theta) \cdot [(1+i)y - Ai \cdot \cos\theta] - \sin\alpha \cdot \sin\theta \cdot [(1+i)x \cdot \sin\gamma - A \cos\alpha \cdot \sin\theta]$$

$$\text{啮合方程：} \quad n_1 \cdot V_{12} = 0 \quad (27)$$

将式(18)代入上式得：

$$n_1 \cdot V_{12} = \omega_1 n_1 \cdot P + \omega_2 n_1 \cdot Q = 0 \quad (28)$$

ω_1, ω_2 是角速度,可取任意实数,上式始终成立的必要条件是：

$$\left. \begin{aligned} n_1 \cdot P &= 0 \\ n_1 \cdot Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

分别将式(10)以及式(22)代入以上方程组可得：

$$\left. \begin{aligned} \cos(u + \Psi) \cdot (\sin\gamma \cdot p_x + \cos\gamma \cdot p_z) - \sin(u + \Psi) p_y &= 0 \\ \cos(u + \Psi) \cdot (\sin\gamma \cdot q_x + \cos\gamma \cdot q_z) - \sin(u + \Psi) q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将以上两式的后一项移到等号右边,两式相除得：

$$q_y \cdot (\sin\gamma \cdot p_x + \cos\gamma \cdot p_z) = p_y \cdot (\sin\gamma \cdot q_x + \cos\gamma \cdot q_z) \quad (31)$$

用式(25)(26)的 $p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z$ 代入上式化简得：

$$[(1+i)x \sin(\gamma - \alpha) \cdot \sin\theta + (1+i)y \cos\theta - Ai] \cdot Ai \cdot \sin\theta \cdot \cos(\gamma - \alpha) = 0 \quad (32)$$

θ 为偏摆角,故一般 $\sin\theta \neq 0$ 。

同理,中括号里的内容也不为零：

$$(1+i)x \sin(\gamma - \alpha) \cdot \sin\theta + (1+i)y \cos\theta - Ai \neq 0$$

故只有满足：

$$\cos(\gamma - \alpha) = 0 \quad (33)$$

即： $\gamma = 90^\circ + \alpha$ 或 $\gamma = 270^\circ + \alpha$

用 $\gamma = 90^\circ + \alpha$ 代入式(25)再代入式(29)的第一式得：

$$Ai \cos(u + \Psi - \theta) = (1+i) [y \cos(u + \Psi) + x \sin(u + \Psi)] \quad (34)$$

利用 $y \cos(u + \Psi) + x \sin(u + \Psi) = r_b$ 化简得：

$$Ai \cos(u + \Psi - \theta) = (1+i) r_b \quad (35)$$

由此可见啮合方程为：

$$\left. \begin{aligned} Ai \cos(u + \Psi - \theta) &= (1+i) r_b \\ \gamma &= 90^\circ + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

4 齿廓曲面 Σ_2 的参数方程

要求齿廓曲面 Σ_2 的参数方程,实际上就是要求两个球齿轮的轮齿在任意位置接触时,接触点在坐标系 $C_2=[o_2, x_2, y_2, z_2]$ 中的矢径 R_2 ,即:

$$R_2 = x_2 i_2 + y_2 j_2 + z_2 k_2 \quad (37)$$

两齿面的接触点处必然满足以下条件:

$$R_1 = R_2 + A \quad (38)$$

R_2 、 R_1 分别是齿廓曲面 Σ_2 、齿廓曲面 Σ_1 在固定参考系的矢径。

用矩阵形式表示上式:

$$C_2^{-i\theta} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = C_1^\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - A j \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = C_2^{i\theta} C_1^\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} - A C_2^{i\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

把 C_1^θ 和 $C_2^{i\theta}$ 代入上式得:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\{\sin^2 \alpha [1 - \cos(1+i)\theta] + \cos(1+i)\theta\} x_1 - \cos \alpha \sin(1+i)\theta \cdot y_1 \\ &\quad - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot [1 - \cos(1+i)\theta] \cdot z_1 + A \cos \alpha \cdot \sin \theta \\ y_2 &= \cos \alpha \cdot \sin(1+i)\theta \cdot x_1 + \cos(1+i)\theta \cdot y_1 + \sin \alpha \cdot \sin(1+i)\theta \cdot z_1 - A \cos i\theta \\ z_2 &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot [1 - \cos(1+i)\theta] \cdot x_1 + \sin \alpha \cdot \sin(1+i)\theta \cdot y_1 \\ &\quad + \{\cos^2 \alpha [1 - \cos(1+i)\theta] + \cos(1+i)\theta\} z_1 - A \sin \alpha \cdot \sin i\theta \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

其中 $x_1 = x \sin \gamma$ 、 $y_1 = y$ 、 $z_1 = x \cos \gamma$,同时考虑到有 $\sin \gamma = \cos \alpha$ 、 $\sin \alpha = -\cos \gamma$ 化简上式可得:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= [\cos(1+i)\theta \cdot x - \sin(1+i)\theta \cdot y + A \sin i\theta] \cos \gamma \\ y_2 &= \sin(1+i)\theta \cdot x + \cos(1+i)\theta \cdot y - A \cos i\theta \\ z_2 &= -[\cos(1+i)\theta \cdot x - \sin(1+i)\theta \cdot y + A \sin i\theta] \sin \gamma \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

结合啮合方程,齿廓曲面 Σ_2 的方程为:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= [\cos(1+i)\theta \cdot x - \sin(1+i)\theta \cdot y + A \sin i\theta] \cos \gamma \\ y_2 &= \sin(1+i)\theta \cdot x + \cos(1+i)\theta \cdot y - A \cos i\theta \\ z_2 &= -[\cos(1+i)\theta \cdot x - \sin(1+i)\theta \cdot y + A \sin i\theta] \sin \gamma \\ A i \cos(u + \Psi - \theta) &= (1+i)r_b \\ \gamma &= 90^\circ + \alpha \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

分析上述方程组,不难看出,齿廓曲面 Σ_2 也是一个渐开线回转面。

参考文献:

- [1] Liu Zhiqian, Li Guixian, Li Huamin. Research to Cone Tooth Spherical Gear Transmission of Robot Flexible Joint[J]. The American Society of Mechanical Engineers, 1990, 26.
- [2] Li Guixian, Li Huamin, Bi Zhuming. Meching Analysis on the Quasi-ellipsoidal Gear Transmission with inner Toroidal Teeth in the Flexible Joint of Robot. Chinese Journal of Mechanical Engineering[J]. Vol.5, 1992.
- [3] 潘存云. 球齿轮传动原理探讨. 机械科技的未来——青年科学家论坛[M]. 北京:机械工业出版社, 1994.
- [4] Zhang Kun, Feng Liqun. The Research of the Design of Spherical Gear Transmission Used in Flexible Wrist of Robots[J]. Journal of Tsinghua University, 1994, 34(2).
- [5] 张启先. 空间机构的分析与综合[M]. 北京:机械工业出版社, 1984.

