文章编号 :1001 - 2486(2004)04 - 0099 - 04

离散系统的绝对稳定性*

张　明,胡德文,谢红卫
(国防科技大学机电工程与自动化学院,湖南 长沙　410073)

摘　要 :给出了离散系统绝对稳定性问题的充分条件 :约束条件下的矩阵不等式的正定解 ;基于这一思路可以构造控制器来镇定一类非线性系统 ;最后还给出了设计实例以说明结果的有效性。

关键词 :离散系统 ;绝对稳定性 ;矩阵不等式 ;Lyapunov 函数
中图分类号 :O158　　文献标识码 :A

The Absolute Stability of the Discrete System

ZHANG Ming, HU De-wen, XIE Hong-wei
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :The ideal condition of the absolute stability for the discrete system is given, which depends on whether there is positive solution for constrained matrix inequality. Based on constrained matrix inequality, the controller can be constructed to stabilize one kind of nonlinear system. A design is given to illustrate the main conclusion.

Key words :discrete system ;absolute stability ;matrix inequality ;Lyapunov function

Lyapunov 方法是非线性系统分析与设计的有力工具,但是如何构造 Lyapunov 函数是一个具有挑战性的课题。Lurie 提出的绝对稳定性方法[1],依然具有很强的影响力[2]。其重要性不仅在于给出了定性的描述性概念,而且是构造性非线性控制设计的有机组成成分[3]。

对于连续系统的绝对稳定性,Popov[4]等人给出了著名的正实引理[5]。其充分条件可以归结为 :受一个等式条件约束的矩阵方程是否存在正定解。

1　问题描述

考察的非线性系统可分解为线性单元与非线性单元构成:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) = -\varphi(t, \boldsymbol{y}(t)) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in R^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in R^{n}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} \in R^{m}$。

非线性单元满足扇区条件

$$\begin{gathered} \boldsymbol{K}_{\min}\boldsymbol{y} \leqslant \varphi(t, y) \leqslant \boldsymbol{K}_{\max}\boldsymbol{y} \\ \text{或}(\varphi(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{K}_{\min}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\varphi(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{K}_{\max}\boldsymbol{y}) \leqslant 0 \end{gathered} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{\min}$, $\boldsymbol{K}_{\max}$为 m 维正定矩阵。

显然,当 $\boldsymbol{x}(t) = 0$ 时,则 $\boldsymbol{y}(t) = 0$, $\varphi(t, \boldsymbol{y}) = 0$,从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t) = 0$。

所以 $\boldsymbol{x} = 0$ 是系统的平衡点。

定义 1　(离散绝对稳定性)考察非线性系统(1),如果对于扇区条件(2),系统在平衡点 $x = 0$ 总是全局渐近稳定的,称系统是绝对稳定的。

进一步,考察非线性系统:

* 收稿日期 :2004 - 02 - 18
基金项目 :国家杰出青年科学基金资助项目(60225015) ;湖南省教育改革基金资助项目
作者简介 :张明(1970—),男,副教授,在职博士生。

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{v}(t)=-\varphi(t,\boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$;$\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{B}_s\in R^{n\times m}$;$\boldsymbol{C}\in R^{m\times n}$;$\boldsymbol{x}\in R^n$;$\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R^m$。

非线性单元满足扇区条件(2)。

关心是否存在反馈策略

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t)+\beta\boldsymbol{v}(t) \tag{4}$$

(其中 $N\in R^{m\times n}$,$\beta\in R$)使得闭环系统(5)是绝对稳定的;其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t+1)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}(t)+(\beta\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{B}_m)\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{v}(t)=-\varphi(t,\boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{5}$$

定义2 如果系统(5)是绝对稳定的,那么称系统(3)是绝对能稳的,并称式(4)为系统(3)的绝对镇定器。

2 主要结果

定理1 对于扇区条件(2)(其中 $K_{\min}=0$,$K_{\max}=K$),非线性系统(1)是鲁棒绝对稳定的充分条件是:存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0$,矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 $k_0>0$ 满足:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}=2k_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}>0 \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}PB=k_0\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}<0 \end{cases} \tag{6}$$

证明 考察Lyapunov函数:

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)>0 \text{ 且 } \|\boldsymbol{x}(t)\|\to\infty \text{ 时,则 } V(\boldsymbol{x}(t))\to+\infty$$

沿系统(1)的轨迹微分,并依据式(6)可得:

$$\begin{aligned}
\Delta V(t,\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \\
&= [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}\varphi(t,\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{B}\varphi(t,\boldsymbol{y})]-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \\
&\leqslant \boldsymbol{x}^{T}(t)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}]\boldsymbol{x}(t)-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\varphi(t,\boldsymbol{y}) \\
&\quad +\varphi^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\varphi(t,\boldsymbol{y})-2k_0\varphi^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y})[\varphi(t,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}] \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}]\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t) \\
&\quad -2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}-k_0\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K})\varphi(t,\boldsymbol{y})-\varphi^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y})\boldsymbol{M}\varphi(t,\boldsymbol{y}) \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}]\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t) \\
&\quad +2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\varphi(t,\boldsymbol{y})-\varphi^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y})\boldsymbol{M}\varphi(t,\boldsymbol{y}) \\
&< -[\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{M}^{1/2}\varphi(t,\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}^{-1/2}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{M}^{1/2}\varphi(t,\boldsymbol{y})] \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

因此,依据Lyapunov稳定性定理可知:对于扇区条件(2)(其中 $K_{\min}=0$,$K_{\max}=K$),系统(1)平衡点 $\boldsymbol{x}=0$ 总是全局渐近稳定的,即非线性系统(1)是绝对稳定。

进一步考察 $K_{\min}\neq0$ 的情形,对非线性系统(1)作回路变换可得:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}(t+1) \\
&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\min}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
&\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\
&\boldsymbol{v}(t)=-\varphi_T(t,\boldsymbol{y}(t)) \\
&\qquad=-(\varphi(t,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{K}_{\min}\boldsymbol{y}(t))
\end{aligned} \tag{7}$$

这时扇区条件变为:

$$(\varphi_T(t,\boldsymbol{y}))^{\mathrm{T}}(\varphi_T(t,\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{K}_{\max}-\boldsymbol{K}_{\min})\boldsymbol{y})\leqslant0$$

于是由上述分析,并对系统(7)应用定理1可得如下结论:

定理2　非线性系统(1)对于扇区条件(2)是绝对稳定的充分条件是:存在正定矩阵$P=P^{T}>0$,矩阵L和$k_0>0$满足式(8):

$$\begin{cases}M=2k_0I-B^{T}PB>0\\(A-BK_{\min}C)^{T}PB=k_0C^{T}(K_{\max}-K_{\min})-L^{T}\\(A-BK_{\min}C)^{T}P(A-BK_{\min}C)-P+L^{T}M^{-1}L<0\end{cases}\tag{8}$$

下面利用定理1和2的结论来研究系统(3)的镇定问题:

定理3　对于扇区条件(2)(其中$K_{\min}=0$,$K_{\max}=K$),非线性系统(3)是绝对镇定的充分条件是:存在正定矩阵$P=P^{T}>0$,矩阵L,$\beta>0$和$k_0>0$满足:

$$\begin{cases}M=2k_0I-(\beta B_s+B_m)^{T}P(\beta B_s+B_m)>0\\(A+B_sN(P))^{T}P(\beta B_s+B_m)=k_0C^{T}K-L^{T}\\[A+B_sN(P)]^{T}P[A+B_sN(P)]-P+L^{T}M^{-1}L<0\end{cases}\tag{9}$$

其中$N(P)$为P的非线性函数。进一步,可设计绝对镇定器(4)为:

$$u(t)=N(P)x(t)+Bv(t)\tag{10}$$

证明　依据定理1及式(9)可得:式(5)是绝对稳定的,定理得证。

注:$N(P)$为P的任意函数,为设计提供了一定的自由度。例如当$N(P)=-B_s^{T}P$,(9)式退化为受约束的改进的离散型Riccati不等式。

进一步考察$K_{\min}\neq0$的情形,同样可以利用回路变换技巧,把系统变换为:

$$\begin{cases}x(t+1)=(A-B_mK_{\min}C)x(t)+B_mv(t)+B_su(t)\\y(t)=Cx(t)\\v(t)=-\varphi_T(t,y(t))=-(\varphi(t,y)-K_{\min}y(t))\end{cases}\tag{11}$$

这时扇区条件变为:

$$(\varphi_T(t,y))^{T}(\varphi_T(t,y)-(K_{\max}-K_{\min})y)\leqslant0$$

对系统(11)应用定理3即可得以下结论。

定理4　非线性系统(4)对于扇区条件(2)是绝对镇定的充分条件是:存在$P=P^{T}>0$,矩阵L,$\beta>0$和$k_0>0$满足:

$$\begin{cases}M=2k_0I-(\beta B_s+B_m)^{T}P(\beta B_s+B_m)>0\\(A-B_sK_{\min}C+B_sN(P))^{T}P(\beta B_s+B_m)=k_0C^{T}(K_{\max}-K_{\min})-L^{T}\\[A-B_sK_{\min}C+B_sN(P)]^{T}P[A-B_sK_{\min}C+B_sN(P)]-P+L^{T}M^{-1}L<0\end{cases}\tag{12}$$

其中$N(P)$为P的非线性函数,进一步,绝对镇定器(5)为:

$$u(t)=N(P)x(t)+Bv(t)$$

3　设计实例

考察如下系统

$$\begin{cases}x(t+1)=\begin{bmatrix}1.8&0\\0&1.8\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.25&0\\1&0.2\end{bmatrix}v(t)+\begin{bmatrix}1.0&0\\0&1.2\end{bmatrix}u(t)\\y(t)=\begin{bmatrix}0.5&0.6\\0&0.4\end{bmatrix}x(t)\\v(t)=-\varphi(t,y)\end{cases}\tag{13}$$

且扇区条件的参数满足$K_{\min}=0$,$K_{\max}=I_2$,问是否存在绝对镇定器(4)使闭环系统绝对稳定?若存在,试确定绝对镇定器(4)的参数。

不难验证,存在正定矩阵$P=P^{T}=I_2>0$,矩阵$L=0.1I_2$,$\beta=0.25$和$k_0=1$满足式(9),即:

$$M = 2k_0 I_2 - \left(\beta\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} P\left(\beta\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix}\right) > 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1.8 & 0\\ 0 & 1.8\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} N(P)\right)^{\mathrm{T}} P\left(\beta\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 1 & 0.2\end{bmatrix}\right)$$

$$= k_0\begin{bmatrix}0.5 & 0.6\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - L^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}1.8 & 0\\ 0 & 1.8\end{bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} N(P)\right)^{\mathrm{T}} P\left(\begin{bmatrix}1.8 & 0\\ 0 & 1.8\end{bmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix} N(P)\right) - P + L^{\mathrm{T}} M^{-1} L < 0$$

其中 $N(P) = -P$，于是依据定理3可知，系统(13)是绝对能稳的，并且(14)式为其绝对镇定器，其中(14)式满足：

$$u(t) = -x(t) + 0.25v(t) \tag{14}$$

4 结束语

与连续时间非线性系统问题相比，离散时间非线性系统问题的分析往往更为复杂[2]。在研究离散时间系统绝对稳定性的过程中也认识到：离散系统绝对稳定性的充分条件实质上可以归结为受两个条件约束(一个为等式约束，一个为正定不等式约束)的矩阵不等式是否存在正定解，而连续系统绝对稳定性的充分条件则是受一个等式条件约束的矩阵方程是否存在正定解。

但是对于非线性系统而言，充分利用系统的结构特点，来构造 Lyapunov 函数，进而设计控制器，是一个有启发的研究思路。

参 考 文 献：

[1] Lurie A I. Some Nonlinear Problems in the Theory of Automatic Control [M]. Gostekhizdat, Moscow, 1952.

[2] Kokotovic P, Arcak M. Constructive Nonlinear Control: Progress in the 90's [A]. 14th world congress of IFAC, Beijing, 1999.

[3] Sepulchre R, Jankovic M, Kokotovic P. Constructive Nonlinear control [M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997.

[4] Popov V M. Hyperstability of Automatic Control Systems Editura Academiei Republicu Sociliste [M]. Romania, Bucharest, 1966 (In Romanian), English translation: Springer-Verlag, 1973.

[5] Khalil H K. Nonlinear Systems [M]. 2nd edition Prentice Hall Inc., NJ, 1996.

[6] Larsen M, Kokotovic P. Passivation Design for a Turbocharged Diesel Engine Model [A]. In Proceedings of 37th IEEE Conference On Decision and Control, Tampa, FL, 1998: 1535-1541.