

粘弹性增量界面元法*

刘 甫,任钧国,周建平

(国防科技大学航天与材料工程学院,湖南长沙 410073)

摘要 :采用界面元模型,推导了粘弹性增量界面元列式。算例表明,粘弹性增量界面元法能有效地用于粘弹性不连续介质问题的分析。

关键词 :界面元;粘弹性;脱粘;结构完整性

中图分类号 :V211.1+8 **文献标识码** :A

Incremental Interface Element Method of Viscoelastic Materials

LIU Fu, REN Jun-guo, ZHOU Jian-ping

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :Formulas of the incremental interface element method for viscoelastic materials are deduced in the interface element model. The numeral example shows that the viscoelastic interface element method is effective in the analysis of viscoelastic discontinuous medium.

Key words :interface element method; viscoelastic; debond; structural integrity

在固体火箭发动机结构完整性分析中,需要计算受载荷作用时推进剂与绝热层、包覆层以及外壳等不同介质间的界面力学特性^[1,2]。研究这类由两种粘弹性材料构成的界面力学问题,采用粘弹性界面元法比粘弹性有限元法具有更好的适用性。

贴壁浇注式固体火箭发动机燃烧室绝热层/推进剂界面的脱粘,有可能导致燃烧室压力失控甚至发动机爆炸的灾难性后果^[3,4]。在研究诸如药柱脱粘这类不连续介质问题时,有限元法采用位移协调元,很难描述界面的不连续位移,而且其应力因通过位移求导而丧失一阶精度。界面元法采用非协调元,应力与界面位移具有同阶的精度,其模型中的离散块体元可为任意形状,便于描述复杂结构形体和边界,且具有与有限元相当的计算效率,非常适用于界面脱粘分析。

1 界面元模型

界面元法是在吸收 Kawai 刚体弹簧元模型^[5]思想的基础上提出的求解不连续变形问题的新的数值计算方法^[6~8]。

图 1 所示的界面元,采用的模型是基于单元变形累计于界面层的假设而建立起来的块体元——界面层组合的离散体,由于单元的变形已累积在界面层,块体元仅有刚体位移。

由块体元的位移模式可以把块体元内任一点的位移用形函数 N 和块体元形心点的位移 u_g 表示为:

$$u = Nu_g \quad (1)$$

其中, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_g - y \\ 0 & 1 & x - x_g \end{pmatrix}$ (x_g, y_g) 是块体元形心坐标。

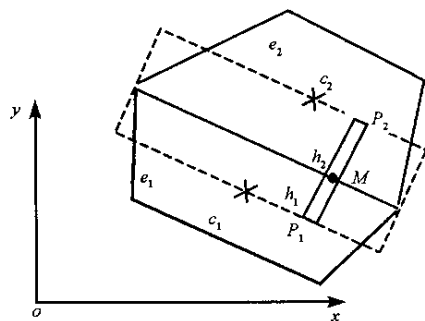


图 1 界面元模型

Fig.1 Model of interface element method

* 收稿日期:2004-03-10
基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(19925209)
作者简介:刘甫(1966—),男,副教授,博士。

块体单元 e_1 、 e_2 的形心分别为 c_1 和 c_2 ， M 为界面上的一点，微分条 P_1M 、 P_2M 的长度分别为 h_1 和 h_2 。

对于粘弹性增量界面元，需要用粘弹性界面元（粘弹性微分条）来反映变形特征。假设在某时间增量段内粘弹性微分条 P_1M 和 P_2M 的应变是均匀分布的，则微分条的应变与其轴向变形 $\Delta\delta_n^*$ 及剪切变形 $\Delta\delta_s^*$ 有如下关系：

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(i)} = \frac{\Delta\delta_n^{*(i)}}{h_i}, \quad \Delta\boldsymbol{\gamma}_s^{(i)} = \frac{\Delta\delta_s^{*(i)}}{h_i} \quad (2)$$

界面上一点 M 的相对位移可表示为：

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)} + \Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)} = -\mathbf{L}^{(1)}\{\mathbf{N}^{(1)}\Delta\mathbf{u}_g^{(1)} - \mathbf{N}^{(2)}\Delta\mathbf{u}_g^{(2)}\} \quad (3)$$

式中， \mathbf{L} 为整体坐标与局部坐标之间的转换矩阵^[6]。

2 粘弹性增量界面元法

在图 1 所示的界面元离散模型中，假设单元 e_1 、 e_2 为粘弹性材料，其流变性质主要表现在剪切，剪切本构关系由 Prony 级数描述，即：

$$G_i(t) = \sum_{j=0}^N G_{ij} e^{-\eta_j t} \quad (i = 1, 2 \text{ 分别对应单元 } e_1 \text{ 和 } e_2) \quad (4)$$

问题的本构关系可写为：

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{D}_i \int_0^t G_i(t-\tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\partial \tau} d\tau \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

将时间 $[0, t]$ 划分为 k 个时间段，则在 t_k 时刻：

$$\boldsymbol{\sigma}^i(t_k) = \mathbf{D}_i \sum_{j=1}^k G_i(t_k - t_j) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i(t_j) = \mathbf{D}_i \sum_{j=1}^k G_i(t_k - t_j) \frac{\Delta\delta^{*(i)}(t_j)}{h_i} \quad (6)$$

在 t_{k+1} 时刻应力增量：

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\sigma}^i(t_{k+1}) &= \boldsymbol{\sigma}^i(t_{k+1}) - \boldsymbol{\sigma}^i(t_k) = \mathbf{D}_i G_i(0) \frac{\Delta\delta^{*(i)}(t_{k+1})}{h_i} \\ &+ \mathbf{D}_i \sum_{j=1}^k \left[\sum_{m=1}^N G_{im} e^{-\eta_{im}(t_k - t_j)} \{ e^{-\eta_{im} \Delta t_{k+1}} - 1 \} \right] \frac{\Delta\delta^{*(i)}(t_j)}{h_i} \end{aligned} \quad (7)$$

记

$$\frac{\mathbf{D}_i G_i(0)}{h_i} = \mathbf{A}_i \quad (8a)$$

$$\mathbf{D}_i \sum_{j=1}^k \left[\sum_{m=1}^N G_{im} e^{-\eta_{im}(t_k - t_j)} \{ e^{-\eta_{im} \Delta t_{k+1}} - 1 \} \right] \frac{\Delta\delta^{*(i)}(t_j)}{h_i} = \Delta\mathbf{B}_i(t_{k+1}) \quad (8b)$$

由界面应力连续性有：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^1(t_{k+1}) = \Delta\boldsymbol{\sigma}^2(t_{k+1}) = \Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{k+1})$$

于是得：

$$\Delta\delta^{*(i)}(t_{k+1}) = \mathbf{A}_i^{-1} \Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{k+1}) - \mathbf{A}_i^{-1} \Delta\mathbf{B}_i(t_{k+1}) \quad (9)$$

界面上 M 点的相对位移可视为相邻单元的位移作用下引起的两微分条变形之和，即：

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^{(1)} + \Delta\boldsymbol{\delta}^{(2)} = \Delta\delta^{*(1)} + \Delta\delta^{*(2)}$$

于是，可以推出：

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{k+1}) = \mathbf{C}^{-1} [\Delta\delta^{(1)}(t_{k+1}) + \Delta\delta^{(2)}(t_{k+1})] + \Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{k+1}) \quad (10)$$

式中，

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_1^{-1} + \mathbf{A}_2^{-1} \quad (11a)$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}(t_{k+1}) = \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{A}_1^{-1} \Delta\mathbf{B}_1(t_{k+1}) + \mathbf{A}_2^{-1} \Delta\mathbf{B}_2(t_{k+1})] \quad (11b)$$

考虑到(3)式，可以把(10)式改写为：

$$\Delta\sigma(t_{k+1}) = -C^{-1}L^T [N^{(1)}\Delta u_g^{(1)}(t_{k+1}) - N^{(2)}\Delta u_g^{(2)}(t_{k+1})] + \Delta\sigma_r(t_{k+1}) \quad (12)$$

界面元离散模型中,块体的变形累积于界面,块体元本身没有应变。界面力在界面的相对虚位移上做虚功。因此,虚功方程为:

$$-\sum_e \iint_{s_0^e} \delta u^T \Delta \sigma ds = \sum_e \left[\iint_{\Omega^e} \delta u^T \Delta f d\Omega + \iint_{s_0^e} \delta u^T \Delta \bar{p} ds \right] \quad (13)$$

将(12)式代入(13)式,并引入选择矩阵 C_e ,建立整体位移列阵 U 与单元位移列阵 u_g 的关系 $u_g = C_e U$,则上式可写为:

$$\begin{aligned} \delta U^T \left[\sum_e C_e^{(1)T} \iint_{s_0^e} N^{(1)T} L^{(1)T} C^{-1} L^{(1)} N^* ds C_e^* \right] \Delta U - \delta U^T \sum_e C_e^{(1)T} \iint_{s_0^e} N^{(1)T} L^{(1)T} \Delta \sigma_r(t_{k+1}) ds \\ = \delta U^T \left[\sum_e C_e^T \left(\iint_{\Omega^e} N^T \Delta f d\Omega + \iint_{s_0^e} N^T \Delta \bar{p} ds \right) \right] \end{aligned}$$

其中, $C_e^* = [C_e^{(1)} \quad -C_e^{(2)}]^T$, $N^* = [N^{(1)} \quad N^{(2)}]$, $N^* C_e^* = [N^{(1)} C_e^{(1)} - N^{(2)} C_e^{(2)}]$
由 δU 的任意性,得界面元的支配方程:

$$K \Delta U(t_{k+1}) = \Delta R(t_{k+1}) \quad (14)$$

其中

$$K = \sum_e C_e^{(1)T} \iint_{s_0^e} N^{(1)T} L^{(1)T} C^{-1} L^{(1)} N^* ds C_e^* = \sum_j C_e^{*T} \left[\iint_{s_j^e} N^{*T} L^{(1)T} C^{-1} L^{(1)} N^* ds \right] C_e^* \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sum_e C_e^T \left(\iint_{\Omega^e} N^T \Delta f d\Omega + \iint_{s_0^e} N^T \Delta \bar{p} ds \right) + \sum_e C_e^{(1)T} \iint_{s_0^e} N^{(1)T} L^{(1)T} \Delta \sigma_r(t_{k+1}) ds \\ &= \sum_e C_e^T \left(\iint_{\Omega^e} N^T \Delta f d\Omega + \iint_{s_0^e} N^T \Delta \bar{p} ds \right) + \sum_j C_e^{*T} \left[\iint_{s_j^e} N^{*T} L^{(1)T} \Delta \sigma_r(t_{k+1}) ds \right] \end{aligned} \quad (15b)$$

由于采用分片刚体位移模式(15a)式中的刚度矩阵 K 的积分和(15b)式中对 $\Delta \sigma_r(t_{k+1})$ 的积分可改在界面上进行,而且由于用 $C_e^{*T} = [C_e^{(1)} \quad -C_e^{(2)}]^T$ 代替 $C_e^{(1)T}$,所以对单元的求和 \sum_e 改为对界面的求和 \sum_j 。

3 算例及结论

图2所示长12m,高2m的匀质悬臂梁, $E = 1.0 \times 10^5 \text{MPa}$, $\mu = 0.33$,分别采用由24个块体和30个界面组成的界面元模型及由24个四边形单元组成的有限元模型计算,结果见表1。

由表1可以看出,界面元的计算结果是比较满意的,尤其是其应力精度非常突出,在剖分大致相同的情况下,界面元的应力计算结果优于有限元。

表1 悬臂梁计算结果

Tab.1 Calculated results of cantilever

	均布载荷 $q = 10\text{kN/m}$		悬臂端集中力 $P = 60\text{kN}$	
	$v_{\max}(\text{m})$	$\sigma_{\max}(\text{MPa})$	$v_{\max}(\text{m})$	$\sigma_{\max}(\text{MPa})$
解析解	0.389	1.080	0.518	1.080
界面元解	0.391	1.081	0.515	1.081
有限元解	0.395	0.962	0.517	1.01

考虑大长径比筒状药柱的固体发动机在内压作用下的响应问题,药柱内半径 $a = 100\text{mm}$,外半径 $b = 177\text{mm}$,壳体厚度 $h = 3\text{mm}$,由于对称,取1/4来研究,即如图3所示的平面应变问题。

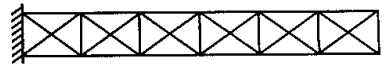


图2 悬臂梁界面元单元划分

Fig.2 Interface element split on cantilever

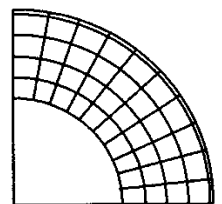


图3 发动机界面元单元剖分

Fig.3 Interface element split on SRM

结构划分为 50 个块体元, 95 个界面元的网格。壳体为弹性材料, 弹性模量为 200GPa, 泊松比为 0.3, 药柱为粘弹性材料, 松弛模量为:

$$E(t) = 0.705886 + 0.168169e^{-3.31887 \times 10^{-5}t} + 0.098714e^{-3.31887 \times 10^{-4}t} + 1.930384e^{-3.31887 \times 10^{-3}t}$$

内压载荷为:

$$P(t) = 6.3238(1 - e^{-20t})$$

图 4 给出了 $r = 101\text{mm}$ 处环向和径向应力随时间的变化图, 图 5 给出了 $r = 101\text{mm}$ 和 170mm 处环向和径向应变随时间的变化图。

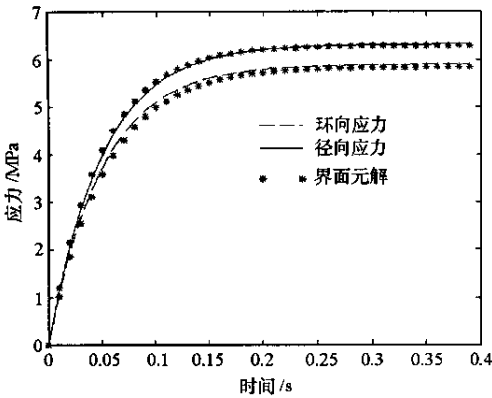


图 4 $\sigma_{\theta} - t$ 和 $\sigma_r - t$ 图

Fig.4 The illustration of $\sigma_{\theta} - t$ and $\sigma_r - t$

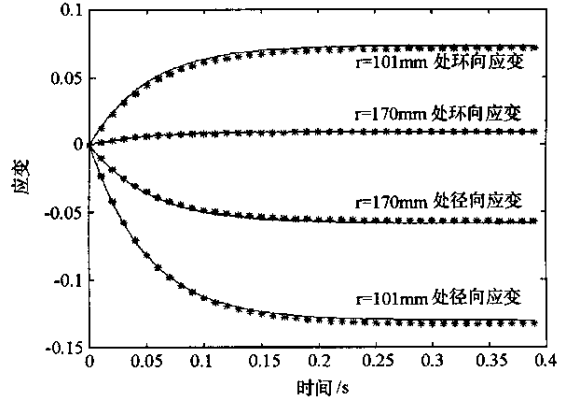


图 5 $\varepsilon_{\theta} - t$ 和 $\varepsilon_r - t$ 图

Fig.5 The illustration of $\varepsilon_{\theta} - t$ and $\varepsilon_r - t$

将粘弹性界面元的计算结果与此问题的解析解^[9]比较, 可以看出界面元具有较高的计算精度。在利用(14)式求解时, 由于不需要在每个时间步上重新计算刚度矩阵, 只需对载荷阵进行修正, 因此计算时间大大缩短。可见, 本文方法能有效用于分析由两种粘弹性(或弹性)材料构成的界面力学问题。此外, 对于药柱脱粘甚至扩展这类具有开裂界面的问题, 也可引入相应的破坏准则, 通过将相关单元的弹性矩阵置零来方便地进行计算。可以预计, 粘弹性界面元法将成为非常适用于界面脱粘分析的一种新方法。

参考文献:

- [1] 史宏斌, 朱念祖, 张善祁. 多种材料人工脱粘应力场分析[J]. 固体火箭技术, 1999(1).
- [2] 史宏斌, 侯晓, 朱念祖, 等. 含缺陷药柱人工脱粘层前缘应力分析[J]. 固体火箭技术, 1999(3).
- [3] 尹华丽, 王清和. 界面脱粘性能的影响因素[J]. 固体火箭技术, 1998(3).
- [4] 邢耀国, 王立波, 董可海, 等. 燃烧条件下影响推进剂脱粘面扩展的因素[J]. 推进技术, 2001, 22(1): 77-80.
- [5] Kawai T. New Discrete Models and Their Application to Seismic Response Engineering[J]. Nuclear Engineering and Design, 1978, 48: 207-229.
- [6] 方义琳, 卓家寿, 章青. 具有任意形状单元离散模型的界面元法[J]. 工程力学, 1998, 15(2): 27-37.
- [7] Zhou J S et al. Interface Stress Element Method for Deformable Body with Discontinuous Medium Such as Rock Mass[C]. Proc. of 8th ISRM, 1995, Tokyo 939-941.
- [8] 章青, 卓家寿. 加锚岩体的界面应力元模型[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 50-53.
- [9] 王元有. 推进剂药柱在内压载荷下的应力应变的粘弹性分析[J]. 兵工学报, 1983, 3: 20-33.

