

## 再入目标质阻比估计算法研究\*

金文彬,刘永祥,黎湘,任双桥

(国防科技大学 ATR 实验室 湖南长沙 410073)

**摘要** 再入段目标识别的核心问题是快速高精度地估计出目标的质阻比。针对再入过程的非线性问题,重点研究了样条卡尔曼滤波器、扩展卡尔曼滤波器和一种基于“无损传输”的扩展卡尔曼滤波器,仿真实验从质阻比的估计精度和收敛速度以及计算量等方面比较了各滤波算法的性能。仿真结果表明基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器的估计精度最高,收敛速度最快。

**关键词** 质阻比,样条卡尔曼,扩展卡尔曼,无损传输

中图分类号:TN95 文献标识码:A

## Research on Estimation of Mass-to-drag Ratio of Reentry Objects

JIN Wen-bin, LIU Yong-xiang, LI Xiang, REN Shuang-qiao

(ATR Lab, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** The key problem for reentry vehicle (RV) discrimination during the reentry phase is to estimate the mass-to-drag ratio of RV precisely and rapidly. Aiming at the nonlinear characteristic of reentry process, three filters: as spline Kalman filter, extended Kalman filter and a new extended Kalman filter based on “unscented transform” are studied. The comparison of estimating performance for these filters are provided through simulating experiment with terms of estimating precision and converging speed. Experimental results show that the new EKF based on “unscented transform” has the best performance on the estimation of mass-to-drag ratio.

**Key words** mass-to-drag ratio, spline Kalman, extended Kalman filter, unscented transform

再入目标质阻比估计是弹道导弹末端段防御的核心问题之一,其估计精度越高,收敛速度越快,则越有利于再入目标跟踪,实现真假目标区分。再入过程是一个高度复杂的非线性问题<sup>[1~5]</sup>,早期再入目标跟踪雷达大多建立解耦的线性卡尔曼滤波器,实时估计位置、速度和加速度,由再入运动方程计算质阻比<sup>[1,4]</sup>。针对再入运动方程非线性问题,提出了多种扩展卡尔曼滤波器,将质阻比作为状态向量进行实时估计,但主要难点是质阻比变化不能表示为状态向量的显性函数,一般常用独立增量过程来描述质阻比<sup>[2~4]</sup>,这也造成了模型误差难以准确给出、引起滤波器发散的问题。为解决质阻比的快速、高精度估计问题,本文主要研究了三种滤波器:基于分段多项式模型的样条卡尔曼滤波器<sup>[8]</sup>(Spline Kalman)、扩展卡尔曼滤波器(EKF)和一种基于“无损传输”(Unscented Transform)的扩展卡尔曼滤波器<sup>[5~7]</sup>(NewEKF),为了验证基于分段多项式模型的样条卡尔曼滤波器比一般线性卡尔曼滤波器的优越性,还仿真实现了基于恒加速模型(CA)的线性卡尔曼滤波器作为比较。

## 1 再入运动方程

假定大气层是球对称和不旋转的。考虑沿弹道飞行的再入目标,作用在目标上的力主要包括重力和阻力。重力方向指向地球中心,其强度为  $GM/R^2$ ,重力常数  $GM = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ , $R$  为目标到地球中心的距离。目标再入大气层时受到的大气阻力方向与速度方向相反,大小为:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D A \quad (1)$$

\* 收稿日期:2004-03-12  
基金项目:国家部委资助项目(4130304-01)  
作者简介:金文彬(1980-),男,硕士生。

其中,  $V$  为速度,  $A$  为目标在速度方向上的投影面积,  $C_D$  为阻力系数。大气密度  $\rho$  是高度的函数, 一般近似为指数衰减函数,  $\rho = \exp\left(-\frac{R_0 - R}{H_0}\right)$ , 其中,  $H_0 = 13.406$  地球半径,  $R_0 = 6374\text{km}$ ,  $R$  为目标到地心的距离。因此, 阻力对目标产生的加速度大小为:

$$a_D = \frac{F_D}{m} = \frac{1}{2} \rho(h) V^2 \frac{C_D A}{m} \quad (2)$$

定义质阻比:

$$\beta = \frac{m}{C_D A} \quad (3)$$

由质阻比定义可以看出, 质阻比是弹头质量和外形参数的组合参数, 是描述目标再入特性的重要参数, 也是导弹防御系统区分真假目标的重要的特征量。

为简单起见, 考虑二维再入问题, 如图 1 所示, 参考坐标系是地心坐标系  $(x_1, x_2)$ , 实线为地球表面, 虚线为再入弹道, 目标在再入大气前的轨迹近似为弹道式, 随着再入过程中大气密度增加, 大气阻力的影响越来越大, 直到目标差不多垂直再入。图 2 则给出了该再入过程中速度和加速度随时间的变化曲线。

描述目标运动的微分方程如下<sup>[5]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\beta} \rho \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \frac{GM}{R^3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

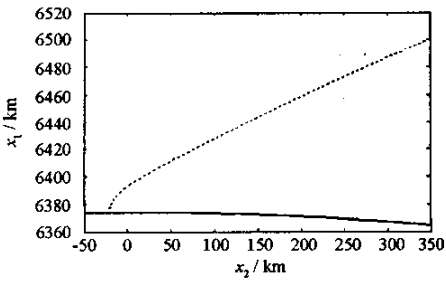


图 1 典型再入弹道示意图

Fig.1 Representative reentry progress

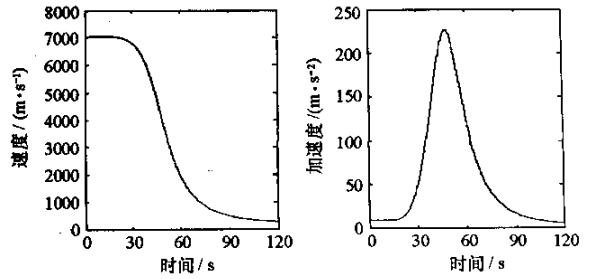


图 2 再入过程中速度和加速度的变化

Fig.2 Velocity and acceleration during reentry

## 2 基于卡尔曼滤波的质阻比估计算法

卡尔曼滤波器的核心思想是由观测量产生的信息经最佳加权更新状态估计, 以使得估计均方差最小。它有着独特的“预测—修正”结构, 关于卡尔曼滤波器已经研究出很多, 大多都是在“预测”机制上有所不同。

### 2.1 基于样条卡尔曼滤波的质阻比估计算法

再入目标的跟踪过程中, 由于加速度的大动态变化, 基于 CA 模型的线性卡尔曼滤波器的性能受到较大影响。文献 [8] 提出了样条卡尔曼滤波器思想, 其核心是在每一个采样周期内, 加速度的变化率为一常数, 即在每一个子区间内  $[t_k, t_{k+1}]$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) 内  $d\dot{x}(t)/dt = S_k + \varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_k$  为随机的加速度变化率。假设  $\varepsilon_k$  为正态白噪声序列, 即  $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , 则离散化的状态方程为:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Phi_1 S_k + W_k \quad (5)$$

其中,  $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\Phi_1 = \begin{bmatrix} T^3/6 \\ T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$ ,  $W_k = \Phi_1 \varepsilon_k$ ,  $T$  为采样间隔。且有:

$$\begin{cases} \mathbb{E}(W_k) = 0, & \text{Cov}(W_k, W_l) = Q_k \delta_{k,l}, & Q_k = \sigma^2 \Phi_1 \Phi_1^T \\ \mathbb{E}(W_k V_l^T) = \mathbb{E}(W_k X_0^T) = \mathbb{E}(V_k X_0^T) = 0, & \forall k, l \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2 基于扩展卡尔曼滤波的质阻比估计算法

再入运动由于作用于其上的力比较复杂,不能精确地描述,且目标质量一般会实时变化,导致再入运动表现为严重的非线性形式。扩展卡尔曼滤波器紧密结合再入运动方程,对质阻比进行恰当的建模,把质阻比作为状态向量之一实时给出估计。但扩展卡尔曼滤波存在着容易发散,且系统误差难以确定等难题<sup>[2~4]</sup>,对此,本文主要采取了两个措施使得扩展卡尔曼滤波器的性能更稳定。

(1)采取如下形式质阻比建模:

$$\beta(t) = \beta_0 \exp[\alpha(t)] \quad (7)$$

其中,  $\alpha(t) = \alpha(t)$ ,  $\alpha(t)$  在任一时刻为高斯白噪声,  $\beta_0$  为某典型目标的质阻比。该建模方式保证了质阻比值恒正。这对于保证滤波器的稳定性至关重要。

(2)利用一阶差分离散化状态方程,得到离散化的非线性状态方程,直接计算状态向量预测值,而不是利用雅可比矩阵。仿真证明,相同条件下,扩展卡尔曼滤波器的稳定性能大大提高,对状态误差方差阵的选择的要求降低。

扩展卡尔曼滤波器的状态向量包括目标的位置  $(x_1, x_2)$ , 速度  $(x_3, x_4)$  和描述阻力特性的参数  $x_5$ 。根据再入运动方程,建立如下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = Dx_3(t) + Gx_1(t) + v_1(t) \\ \dot{x}_4(t) = Dx_4(t) + Gx_2(t) + v_2(t) \\ \dot{x}_5(t) = v_3(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $D = -\beta(t)\rho V(t)$ ,  $G = -\frac{GM}{R^3(t)}$ ,  $R(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$ ,  $V(t) = \sqrt{x_3^2(t) + x_4^2(t)}$ ,  $\beta(t) = \beta_0 \exp[\alpha(t)]$ ,  $E[v(i)v^T(j)] = \delta_{ij}Q(j)$ ,  $\forall i, j$ 。

扩展卡尔曼滤波器将非线性的状态方程在当前位置进行线性化处理,通过求雅可比矩阵得到状态转移矩阵,在此状态转移矩阵仅仅用于状态方差预测:

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + Q(k) \quad (9)$$

## 2.3 基于无损传输扩展卡尔曼滤波的质阻比估计算法

一般扩展卡尔曼滤波器存在两个主要问题,一是需要计算雅可比矩阵,二是线性化过程引入模型误差可能导致滤波器不稳定。为解决一般扩展卡尔曼滤波器的这两个问题,通常采用信息粒滤波(Particle filter)方法,其最常用的形式是蒙特卡罗滤波器(Monte Carlo filter),核心思想是对来自给定分布母体(当前状态)的采样集进行非线性变换,变换后的点集就准确地反映了非线性变换的统计特性。该方法克服了一般扩展卡尔曼滤波器的主要缺陷,但又引入了新的问题,比如为了达到可靠预测的目的,需要成千上万的采样点。Simon Julier 和 Jeffrey K. Uhlmann 等提出了基于“无损传输”的概念<sup>[5~7]</sup>,通过构建特征采样点集,只需要很少的采样点就可以实现可靠预测。

### 2.3.1 无损传输

无损传输是一种新的处理非线性传输的方法。与蒙特卡罗滤波器不同,它不是对当前母体进行随机采样,而是构造一个确定的点集,使得它与当前状态具有相同的统计特征,即均值和方差相同。具体地说,无损传输利用当前状态(均值和方差)构造一个点集  $\{X(k)\}$ ,然后让每个点  $X(k)$  通过离散非线性的状态方程,得到非线性变换后的点集  $\{X(k+1)\}$ ,预测均值和方差可以在点集  $\{X(k+1)\}$  上求得。点集  $\{X(k)\}$  的构造方法如下:

$$\begin{cases} X_0 = \mathbf{x}(k|k), & W_0 = \kappa / (n + \kappa) \\ X_i = \mathbf{x}(k|k) + (\sqrt{(n+k)P(k|k)})_i, & W_i = 1 / (n + \kappa) \\ X_{i+n} = \mathbf{x}(k|k) - (\sqrt{(n+k)P(k|k)})_i, & W_{i+n} = 1 / (n + \kappa) \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $n$  是状态向量的维数。 $\kappa$  是实数,恰当的选择可以减少预测误差。如果状态向量服从高斯分布,则选择  $\kappa$  使得  $n + \kappa = 3$ 。 $(\sqrt{(n + \kappa)P(k|k)})_i$  是  $(n + \kappa)P(k|k)$  的平方根的第  $i$  行或者第  $i$  列,如果用 Cholesky 分解,则用第  $i$  行。 $W_i$  是第  $i$  个点对应的权重。

### 2.3.2 预测方程

基于“无损传输”的预测算法如下:

$$\left\{ \begin{aligned} X(k+1|k) &= f[X(k|k), k] \\ \hat{x}(k+1|k) &= \sum_{i=0}^{2n} W_i X(k+1|k) \\ P(k+1|k) &= \sum_{i=0}^{2n} W_i [X(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k)][X(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k)]^T \\ Z(k+1|k) &= HX(k+1|k) \\ \hat{z}(k+1|k) &= \sum_{i=0}^{2n} W_i Z(k+1|k) \\ P_{zv}(k+1|k) &= R(k+1) + \sum_{i=0}^{2n} W_i [Z(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k)][Z(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k)] \\ P_{xv}(k+1|k) &= \sum_{i=0}^{2n} W_i [X(k+1|k) - \hat{x}(k+1|k)][Z(k+1|k) - \hat{z}(k+1|k)] \end{aligned} \right. \quad (11)$$

式中,  $f$  是状态转移函数,  $H$  是观察矩阵。

### 2.3.3 状态向量的构造

本文的仿真为了比较基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器和一般扩展卡尔曼滤波器的质阻比估计性能,认为状态噪声为零。考虑状态噪声时,可以将噪声并入状态向量。

假设离散非线性的状态方程为:

$$x(k+1) = f[x(k), v(k), k] \quad (12)$$

式中,  $x(k)$  为  $n$  维的状态向量,  $v(k)$  为  $q$  维状态噪声。 $E[v(i)v^T(j)] = \delta_{ij}Q(i)$ ,重新构造状态向量,

$x^a(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$ ,此时状态方程变为:

$$x^a(k+1) = f[x^a(k), k] \quad (13)$$

其中,  $x^a(k|k) = \begin{pmatrix} x(k|k) \\ \mathbf{0}_{q \times 1} \end{pmatrix}$ ,  $P^a(k|k) = \begin{bmatrix} P(k|k) & P_{xv}(k|k) \\ P_{xv}(k|k) & Q(k) \end{bmatrix}$ 。

## 3 实验仿真及结论

基于方程(4)生成弹道,初始条件为:

$$x_1(0) = 6500.4 \text{ km}, \quad x_2(0) = 349.14 \text{ km}, \quad \dot{x}_1(0) = -1.8093 \text{ km/s}, \quad \dot{x}_2(0) = -6.7967 \text{ km/s} \quad (14)$$

所有的滤波器中,都认为只有位置观测,且假设再入弹道的位置测量误差均为  $0.1 \text{ km}$ 。

首先验证样条卡尔曼滤波器(Spline Kalman)比基于CA模型的线性卡尔曼滤波器(Kalman)的优越性。仿真中,两个滤波器的状态噪声方差阵都通过精心选择以使得各自的性能达到较佳状态,为简单起见,设  $\beta$  的值恒为  $2500 \text{ kg/m}^2$ 。

图3给出两种滤波器的质阻比估计误差绝对值随高度的变化曲线。由图可知,在高度为  $50 \text{ km}$  时,卡尔曼滤波器估计的质阻比的误差小于  $1000 \text{ kg/m}^2$ ,而样条卡尔曼滤波器在  $70 \text{ km}$  高度上就能够达到此精度。图中两种滤波器的估计结果抖动很大,主要因为加速度的估计误差引入到了质阻比计算公式的分母中。

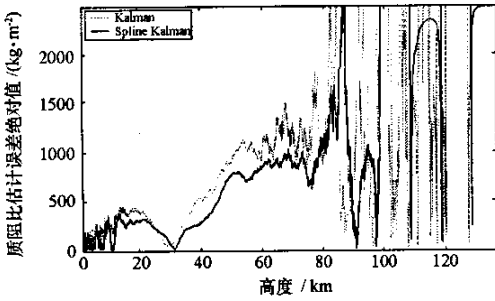


图3 质阻比估计误差绝对值随高度的变化  
Fig.3 Estimate error of drag-to-mass ratio during reentry

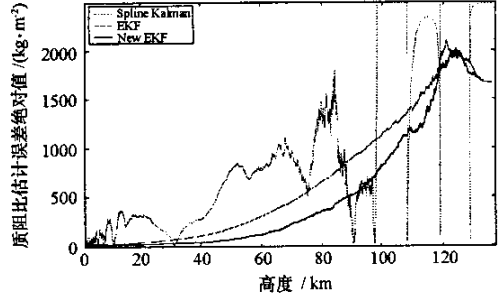


图4 质阻比估计误差绝对值随高度的变化  
Fig.4 Estimate error of drag-to-mass ratio during reentry

本文重点比较了一般扩展卡尔曼滤波器(EKF)、基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器(New EKF)和样条卡尔曼滤波器的性能,同样假设目标质阻比恒为 $2500\text{kg}/\text{m}^2$ 。图4给出了三种滤波器质阻比估计误差随高度的变化关系。由图4可以看出,扩展卡尔曼滤波器的估计精度和收敛速度都大大高于样条卡尔曼滤波器。为比较在各种情况下两种滤波器的性能,图5和图6分别给出了两种扩展卡尔曼滤波器对不同再入初始条件下不同质阻比目标的估计结果。

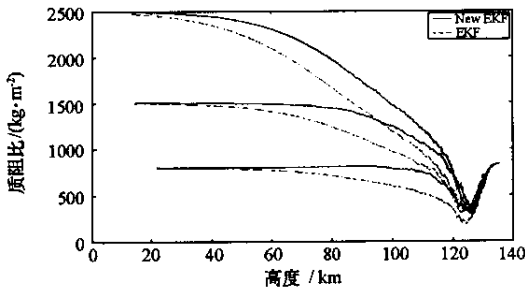


图5 再入初速度为 $7.0334\text{km}/\text{s}$   
Fig.5 Re-entry velocity is  $7.0334\text{km}/\text{s}$

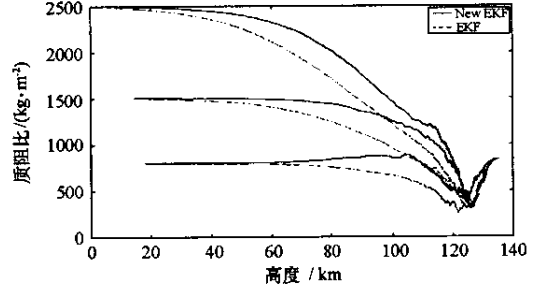


图6 再入初速度为 $4.94\text{km}/\text{s}$   
Fig.6 Re-entry velocity is  $4.94\text{km}/\text{s}$

图5的初始条件如(14)式,再入初速度为 $7.0334\text{km}/\text{s}$ ,图6的初始条件为

$$x_1(0) = 6500.4\text{km}, \quad x_2(0) = 349.14\text{km}, \quad \dot{x}_1(0) = -1.8093\text{km}/\text{s}, \quad \dot{x}_2(0) = -4.5967\text{km}/\text{s} \quad (15)$$

再入初速度为 $4.94\text{km}/\text{s}$ 。由以上两图可以看出(1)基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器收敛速度更快,估计精度更高(2)两种扩展卡尔曼滤波器均可在很大的高度上对不同质阻比目标实现区分。

在上面的仿真中,为比较扩展卡尔曼滤波器和基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器的收敛速度和估计精度,没有考虑状态噪声。如果对扩展卡尔曼滤波器和基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器加上适当的方差,会提高这两种滤波器性能,如图7所示。实验中使用不同的噪声方差,收敛快慢及精度不同,但都比较稳定。

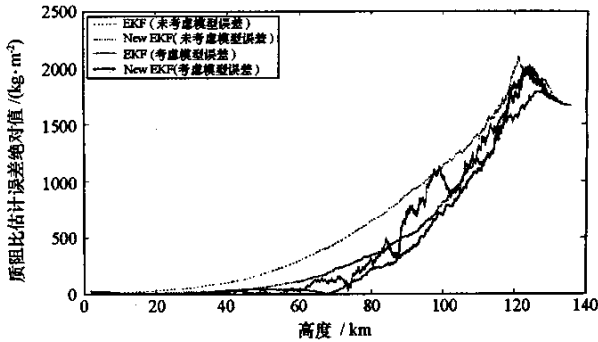


图7 考虑模型误差时两种扩展卡尔曼滤波器质阻比估计效果

Fig.7 Estimate results of the two EKF when considering modelling error

## 4 结论

(1) 针对目标再入过程中加速度存在突变的情况,引入基于分段多项式模型的样条卡尔曼滤波器,即假设在每一个采样区间上加速度的变化率为常数。仿真表明样条卡尔曼滤波器比基于CA模型的线性卡尔曼滤波器性能大为提高。

(2) 由于再入过程的严重非线性,引入扩展卡尔曼滤波方法。针对扩展卡尔曼滤波容易发散的缺点,采取了两个措施:对质阻比进行指数建模,利用一阶差分离散化非线性状态方程,直接利用此离散的非线性状态方程进行状态向量的预测,使得扩展卡尔曼滤波器的稳定性能大大提高。

(3) 实现了基于无损传输的扩展卡尔曼滤波器,克服了传统的扩展卡尔曼滤波器存在的几个问题,而且有更高的收敛速度和估计精度。

## 参考文献:

- [1] Catalarro S F, Schneider H. Determination of Weight-to-drag Ratio from Radar Measurements[R]. AD401488, 1963.
- [2] Mehra R K. A Comparison of Several Nonlinear Filters for Reentry Vehicle Tracking[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1971, AC-16(4): 307-319.
- [3] Jesionowski R, Zarchan P. Comparison of Filtering Options for Ballistic Coefficient Estimation[R]. ADA355740, 1998.
- [4] Cardillo G P, Mirstik A V, Plambeck T. A Track Filter for Reentry Objects with Uncertain Drag[J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(2): 394-408.
- [5] Julier S, Uhlmann J K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems[J]. SPIE, 1997, 3068: 182-193.
- [6] Julier S, Uhlmann J K. A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions[J]. SPIE, 1996: 1-27.
- [7] Julier S, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2000, 45(3): 472-488.
- [8] 汪雄良. 基于参数化技术的目标跟踪方法[D]. 国防科技大学硕士学位论文, 2001.



