

## 围于控制多边形的 NURBS 拐点分析与控制\*

王兴波<sup>1</sup>, 石金龙<sup>1</sup>, 卢世荣<sup>2</sup>

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073; 2. 国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:**从变形的观点出发, 首先研究了一般平面参数曲线变形过程中产生拐点的充分必要条件以及判定拐点的一个泛函方程。在此基础上, 给出了研究非凸控制多边形 NURBS 曲线拐点的方法, 特别研究了正则单拐、双拐多边形 NURBS 曲线拐点的分布问题, 得到了分析与控制相应曲线拐点的条件和判据。本文的结果可应用于调节与控制曲线形状的算法设计, 也可指导 CAD 造型工程师的交互设计。

**关键词:** 拐点, 参数曲线, 形状控制, 算法设计

中图分类号: TH122 文献标识码: A

## Analysis and Control of Inflection Points on NURBS Curves via Control-polygon

WANG Xing-bo<sup>1</sup>, SHI Jin-long<sup>1</sup>, LU Shi-rong<sup>2</sup>

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** This paper first makes a study of the shape variation laws of generic planar parametric curves by means of geometry deformation, obtains a necessary and sufficient condition for a curve's occurring inflection points and a functional equation to determine the inflection points on the deforming curves. Then based on the results, the paper puts forward a method to study the inflection points on NURBS of non-convex control polygon, particularly makes an investigation on the distribution of inflection points on the curve whose control polygon is regular and with one to two inflection points, and gains several conditions and criterions for analysis and manipulation of the respected NURBS curves. The results are useful for the algorithm-design and shape-control in CAD modeling.

**Key words:** inflection point; parametric curve; shape control; algorithm design

NURBS 作为 CAD 造型的基本工具, 自问世以来就受到人们的广泛关注和研究, 尤其是其拐点的分析与计算, 持续成为关注的热点。1992 年, Manocha 与 Canny 提出了利用曲率公式计算真参数化(Proper Parametrization)参数曲线及有理参数曲线拐点的数值方法<sup>[1]</sup>; 1995 年, Goodman 等人研究了 NURBS 曲线变差缩减性质, 得到曲线拐点个数与其控制多边形拐点个数之间的一般关系<sup>[2]</sup>; 1997 年, Li 与 Robert 利用代数曲线的切线与曲线交点的重数关系, 研究了判定齐次坐标空间曲线拐点的方法, 得到了计算有理参数曲线拐点的代数方程法<sup>[3]</sup>; 1999 年, Sakai 又借助于 Mathematica, 得到了利用端点斜率判定三次有理曲线段上拐点的方法<sup>[4]</sup>; 2001 年, Liu Chaoyang 又对 NURBS 保凸性问题进行了研究, 得到了 NURBS 曲线的凸性定理<sup>[5]</sup>。然而不难发现, 为满足 CAD 工程实践的具体需求, 尚需要对 NURBS 拐点的分析判断作更加深入的研究。

CAD 工程师主要通过交互调节曲线的控制顶点或者权因子来控制曲线的形状<sup>[6~8]</sup>, 经常需要判断所设计曲线的凸凹性。根据 Liu Chaoyang 的凸性定理, 凸的控制多边形将产生凸的 NURBS 曲线。但是实践表明, 非凸的控制多边形也可以产生凸的 NURBS 曲线。将控制多边形(权因子)调节到什么程度曲线会出现拐点是交互设计中非常关心的问题。单凭设计者的经验来控制显然是不科学的。因此, 需要研究拐点出现的条件以设计适合计算机处理的自动判断算法, 这对于 CAD 工程十分重要。

\* 收稿日期: 2004-04-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50175106) 广东省自然科学基金资助项目(04021250)

作者简介: 王兴波(1963—), 男, 副教授, 博士。

作者在文献 9 通过引入转向矢量 给出了平面曲线拐点的一个数学定义 并演绎推导出曲线在拐点处的若干性质。本文在该文献基础上 首先从变形的观点出发 研究了一般平面参数曲线变形中的几何特征变化规律 得到了曲线形状变化过程中产生拐点的充分必要条件以及确定拐点的一个泛函方程；同时 结合 NURBS 的特殊要求 研究了非凸多边形 NURBS 曲线出现拐点的条件和判据。本文的结果可应用于调节与控制曲线形状的算法设计 也可指导 CAD 造型工程师的交互设计。

## 1 曲线变形及其几何特征的变化

### 1.1 预备知识

定义 1 设有向平面  $\pi$  的单位法矢量为  $B$  ,  $a, b$  是  $\pi$  上两个矢量。  $a$  在  $\pi$  上绕其起点按照  $\pi$  的定向法则正向转动到与  $b$  的方向相同时扫过的有向角为  $\langle a, b \rangle$  则  $a, b$  的矢量积(叉积)为：

$$a \times b = B |a| |b| \sin \langle a, b \rangle$$

容易验证 定义 1 是经典矢量积在平面上的归一化表示 它将经典平面矢量叉积的方向与数量关系统一在一个完整的数学式中。

定义 2 平面曲线的拐点、转向矢量。见文献 9 ]

下面的引理 1~3 亦可由文献 9 ] 的相关理论直接推出。

引理 1 设平面连续曲线  $r(t)$  具有分段  $C^1$  连续的单位切矢量  $K(t)$  是与  $r(t)$  对应的转向矢量 那么  $r(t)$  在某区间的拐点个数等于  $K(t)$  在该区间的方向改变次数。

引理 2 如果两条同源平面正则曲线  $r_1(t), r_2(t)$  的切矢、主法矢分别为  $T_1(t), T_2(t), N_1(t), N_2(t)$  若在  $t^*$  点满足  $0 \leq \langle T_1(t^*), T_2(t^*) \rangle < \pi, N_2(t^*)$  在  $N_1(t^*)$  上的投影与  $N_1(t^*)$  的方向相反 则  $r_1(t), r_2(t)$  在  $t^*$  点的回转方向是相反的。

引理 3 假设平面正则曲线  $r(t)$  在起点与终点的  $K$  矢量有相同的方向 那么  $r(t)$  的拐点个数为偶数 若  $r(t)$  在起点与终点的  $K$  矢量有不同的方向 则  $r(t)$  的拐点个数为奇数。

注意 :引理 1 中  $r(t)$  具有分段  $C^1$  连续的单位切矢量是一个非常重要的条件 故在后文中如无特殊说明 都假定所讨论的曲线满足该条件。

### 1.2 曲线变形与法矢、转向矢的变化

参数曲线  $r_1 = r_1(t)$  在变形位移(偏移量)  $r_2 = r_2(t)$  的作用下 变形为  $r(t)$  其数学表示为：

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) \quad t \in [a, b] \tag{1}$$

变形往往导致曲线的凸凹性、连续性等发生变化。依据上节分析 不难得到以下结论：

定理 1 设平面凸曲线  $r$  的两个端点位置固定不变  $r$  上一点  $P$  变形前后的切矢与主法矢分别为  $T_1, T_2$  与  $N_1, N_2$  如果  $T_1, T_2$  满足  $0 \leq \langle T_1, T_2 \rangle < \pi$  而  $N_2$  在  $N_1$  上的投影与  $N_1$  的方向相反 则变形后  $r$  失去原有凸性(出现拐点或者没有拐点但改变原有回转方向)。

证明  $r$  的两个端点固定意味着曲线不能有整体转动 这就避免了变形过程中  $r$  绕一个端点刚性旋转而导致  $\langle N_1, N_2 \rangle$  大于  $\pi$  的情形。将变形前与变形后  $r$  的两种状态看成是两条同源曲线 根据引理 2 知 在  $P$  点附近变形前后的转向矢量方向是相反的。此时若  $r$  上另外一点  $Q$  变形前后的转向矢量方向不变 则根据引理 1 知  $r$  变形后出现拐点 若  $r$  上所有点变形后的转向矢量方向都不同于变形前 则曲线整体转向发生改变。故定理成立。 [ 证毕 ]

上述基于法矢方向变化的方法 只能定性地分析曲线变形前后凸凹性的变化 无法与位移量之间建立数学上解析的关系。下面进一步研究变形与位移之间的直接联系。这里只考虑工程中常见的一种情形 :平面光滑凸曲线  $r$  在固定方向位移  $u$  作用下的压变形(  $u$  指向  $r$  弯曲一侧 )。

记  $\bar{r}$  为  $r$  变形后的曲线 为方便 采用  $r$  的弧长为参数来研究问题。设  $S$  为  $r$  的弧长 那么  $\bar{r}(s), r(s), u(s)$  的关系可用下式表达：

$$\bar{r}(s) = r(s) + u(s), u(s) = V\phi(s) \quad 0 \leq s \leq S \tag{2}$$

这里  $\phi(s) \geq 0, \phi(s)$  是  $[0, S]$  上的有界连续函数 表示  $r(s)$  在  $s$  点的变形数量 ;  $V$  是  $u$  的单位矢量。

若  $k(s)$  是  $r(s)$  的(绝对)曲率,  $\alpha(s) = \langle r', V \rangle$ ,  $\phi(s)$  处处至少二阶连续, 那么, 可由(2)知  $\tilde{r}$  具有分段  $C^1$  连续的单位切矢量, 故其转向矢量

$$\tilde{r}' \times \tilde{r}'' = r' \times r'' + r' \times V\phi'' + V \times r''\phi' + V \times V\phi'\phi''$$

由于  $r$  是平面曲线,  $s$  是  $r$  的弧长参数, 上式可改为:

$$\tilde{r}' \times \tilde{r}'' = \dot{r} \times \ddot{r} + \dot{r} \times V\phi'' + V \times \dot{r}\phi' \quad (3)$$

$r$  是凸曲线, 故  $r$  上所有点的副法矢量都具有相同方向, 记该方向的单位为  $B$  并约定  $B$  为  $r$  所在平面的正方向, 则由  $V$  的定义知:

$$\dot{r} \times V = B \sin \alpha$$

由  $\dot{r}, \ddot{r}, V$  的位置关系知  $\langle \ddot{r}, V \rangle = \alpha(s) - \pi/2$ 。据此及 Frenet 公式可将(3)式写为:

$$\tilde{r}' \times \tilde{r}'' = kB + \phi' k \cos \alpha B + \phi'' \sin \alpha B$$

令

$$g(s) = k(s) + \phi'(s)k(s)\cos\alpha(s) + \phi''(s)\sin\alpha(s) \quad (4)$$

得

$$\tilde{r}' \times \tilde{r}'' = gB \quad (5)$$

**定理 2** 设  $r(s)$  是(绝对)曲率为  $k(s)$  的平面凸曲线且具有分段  $C^1$  连续的单位切矢量,  $r(s), \tilde{r}(s), \phi(s)$  满足(3)式且  $\phi(s)$  处处至少二阶连续,  $\alpha(s) = \langle r', V \rangle$ ,  $g(s)$  由(4)式定义, 那么,  $\tilde{r}(s)$  出现拐点的充分必要条件是  $g(s)$  存在零点  $s^*$ , 并且在  $s^*$  的左右去心邻域  $g(s)$  具有不同的(正负)符号。

不难发现, 对于方向固定的位移  $u$ ,  $g(s)$  实际上是  $\phi(s)$  的泛函:

$$g[\phi(s)] = k(s) + \phi'(s)k(s)\cos\alpha(s) + \phi''(s)\sin\alpha(s) \quad 0 \leq s \leq S$$

这样, 变形失稳的问题可以转化为对泛函  $g[\phi(s)]$  零点曲线的问题。这是一个比较复杂的问题, 本文不作深入研究。这里只根据后文需要作简单讨论。为此先给出以下引理。

**引理 4** 设  $f(x)$  是定义在区间  $I$  上的  $C^n$  ( $n > 1$ ) 类实函数, 当  $k > 1$  时  $f^{(k)}(x)$  在  $I$  上有界, 在  $f(x)$  的极值点  $x_0$  处  $f''(x_0) \neq 0$ , 那么, 若  $f(x_0)$  极大, 则  $f''(x_0) < 0$ ; 若  $f(x_0)$  极小, 则  $f''(x_0) > 0$ 。

**定理 3** 设  $\phi(s), g(s), \alpha(s)$  分别由(2)(4)式定义,  $\phi \in C^n$  ( $n > 1$ ) 如果:

- (1)  $\phi^{(k)}$  ( $k > 1$ ) 在定义区间  $[0, S]$  有界且在  $\phi(s)$  的极大值处  $\phi'' \neq 0$ ;
- (2) 在  $\phi(s)$  的极大值附近  $0 \leq \alpha(s) \leq \pi$ ;
- (3) 存在惟一区间  $(s_1, s_2) \subset [0, S]$  使得  $s \in (s_1, s_2)$  时  $g(s) < 0$ ,  $s \notin (s_1, s_2)$  时  $g(s) > 0$ 。

那么,  $\phi(s)$  的极大值(峰值)必在区间  $[s_1, s_2]$  出现。

**证明:** 任取充分小的  $\eta > 0$ , 考虑  $g(s)$  在  $\phi(s)$  极大点  $s^*$  附近的小区间  $[s^* - \eta, s^* + \eta]$  上的定积分

$\int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} g(s) ds$ 。由  $\alpha(s)$  的定义及微分几何理论, 易知  $\alpha(s)$  是单调不增的, 故  $d\alpha(s)/ds = -k(s)$ , 从而有:

$$\begin{aligned} \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} g(s) ds &= \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} k(s) ds + \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} k(s)\phi'(s)\cos(\alpha(s)) ds + \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \phi'' \sin(\alpha(s)) ds \\ &= \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} k(s) ds + 2 \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \phi'' \sin(\alpha(s)) ds - \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \alpha(\phi'(s)\sin(\alpha(s))) \\ &= \alpha(s) \Big|_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} + 2 \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \phi''(s)\sin(\alpha(s)) ds - (\phi'(s)\sin(\alpha(s))) \Big|_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \end{aligned}$$

依据 Taylor 公式  $\phi'(s) = \phi'(s^*) + \phi''(s^*)\chi(s - s^*) + \alpha((s - s^*)^2)$  及  $\phi'(s^*) = 0$ , 可将上式写成

$$\begin{aligned} \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} g(s) ds &= \alpha(s) \Big|_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} - \{ \phi''(s^*)\chi(s - s^*) + \alpha((s - s^*)^2) \} \sin(\alpha(s)) \Big|_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \\ &\quad + 2 \int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \phi''(s)\sin(\alpha(s)) ds \end{aligned}$$

依据条件(1)当  $\eta$  充分小时,  $\{[\phi''(s^*) \chi(s - s^*) + \alpha(s - s^*)^2] \sin(\alpha(s))\} |_{s^* - \eta}^{s^* + \eta}$  是一个无穷小量. 依  $\alpha(s)$  的单调不减性得  $\alpha(s) |_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \leq 0$ ; 再依据条件 1、2、引理 4 及定积分基本性质知,  $\int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} \phi''(s) \sin(\alpha(s)) ds < 0$ , 从而  $\int_{s^* - \eta}^{s^* + \eta} g(s) ds < 0$ . 故  $s^* - \eta, s^* + \eta$  与  $g(s)$  的惟一负值区间  $(s_1, s_2)$  之交集  $s^* - \eta, s^* + \eta \cap (s_1, s_2)$  非空. 此时有三种情形:

- (1)  $s_1 < s^* - \eta, s^* + \eta < s_2$ ;
- (2)  $s^* - \eta < s_1 < s^* + \eta$ ;
- (3)  $s^* - \eta < s_2 < s^* + \eta$ .

在情形(1)下, 定理显然成立. 情形(2)(3)可用反证法证明, 以下证明情形(2).

假设定理不成立, 即  $s^* \notin [s_1, s_2]$ , 依情形(2)不妨假设  $s^* < s_1$ . 根据实数的稠密性质, 总有  $\rho > 0$  使  $s^* + \rho < s_1$ . 考虑到  $\eta$  的任意性, 取  $\eta = \rho$  即得到矛盾, 故定理成立. 同理可证明情形(3). [证毕]

## 2 圆于控制多边形的 NURBS 拐点分析

对于给定控制点列  $P_i (i = 0, 1, \dots, m)$ , 权因子序列  $\omega_i (i = 0, 1, \dots, m)$  与节点矢量  $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}]$  的  $p$  次 NURBS 曲线可以表示为:

$$\Gamma : R(u) = \sum_{i=0}^n P_i R_{i,p}(u) \quad u_p \leq u \leq u_{n+1}$$

如果控制多边形不是凸的, 怎样分析  $G$  的形状? 本小节给出一种基于变形理论的分析方法: 假定多边形  $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$  是由某个凸多边形  $P_0^* P_1^* P_2^* \dots P_n^*$  调节而来, 那么  $G$  的形状就是调节的终止状态. 例如, 将控制顶点  $P_k^*$  调节为  $P_k$ , 其他点不变, 在数学上表现为:

$$\Gamma_1 : \sum_{i=0}^n P_i^* R_{i,p}(u) \Rightarrow \Gamma_2 : \sum_{i=0, i \neq k}^n P_i^* R_{i,p}(u) + P_k R_{k,p}(u) \Rightarrow \sum_{i=0}^n P_i^* R_{i,p}(u) + (P_k - P_k^*) R_{k,p}(u)$$

上式在形式和内容上都与(2)一致. 故可以利用上节结论来研究曲线形状的变化规律. 考虑到 CAD 应用的实际情况, 这里假定所讨论的曲线在端点具有  $p+1$  重节点, 并且控制多边形是正则的<sup>[2]</sup>. 此时不难推导出<sup>[10]</sup>

$$R'(u_p) \times R''(u_p) = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_0^2} \times \frac{p}{u_{p+1} - u_1} \times \frac{p}{u_{p+1} - u_2} \times \frac{p-1}{u_{p+2} - u_2} \times (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) \quad (6)$$

### 2.1 简单单拐多边形 NURBS 曲线的拐点定理

简单单拐多边形是只有一个拐点且边向量不自交的多边形.

**定理 4** 在端点具有  $p+1$  重节点的  $p$  次 NURBS 曲线的控制多边形  $P_0 P_1 P_2 \dots P_n$  只有一个拐点  $P_1$  ( $P_1$  与  $P_3, \dots, P_n$  在矢量  $\vec{P_0 P_2}$  的同侧, 叉积  $\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_2 P_3}, \vec{P_2 P_3} \times \vec{P_3 P_4}, \dots, \vec{P_{n-2} P_{n-1}} \times \vec{P_{n-1} P_n}$  具有相同的方向) 则该 NURBS 曲线一定有且只有一个拐点.

证明 任取  $P_1^*$  使  $P_0 P_1^* P_2 \dots P_n$  构成凸多边形, 则依据凸性定理,

$$r_1(t) = \sum_{i=0, i \neq 1}^n P_i R_{i,p}(t) + P_1^* R_{1,p}(t) \quad t \in [u_p, u_{n+1}]$$

是凸的.

取

$$r_2(t) = (P_1 - P_1^*) R_{1,p}(t) \quad t \in [u_p, u_{n+1}]$$

则

$$r(t) = r_1(t) + r_2(t) \quad t \in [u_p, u_{n+1}]$$

即  $r(t)$  是  $r_1(t)$  发生位移  $r_2(t)$  变形后的形状.

由于在端点具有  $p+1$  重节点, 故依据局部支集性质知, 曲线在端点不发生变形, 此类变形属于端

点固定的情形。依据 NURBS 曲线的凸包性质及端点切矢性质,曲线变形前后端点切矢之间的夹角小于  $\pi$ 。在定理假定的条件下,依据(6)知变形后在左端点的转向矢量的方向与变形前相反,而在右端点保持不变。根据引理 3 及定理 1 知变形后的曲线有拐点。另外根据 Goodman 定理<sup>[2]</sup>,单拐多边形 NURBS 曲线的拐点数不超过 1,故定理成立。[证毕]

图 1 是定理 4 的直观描述。

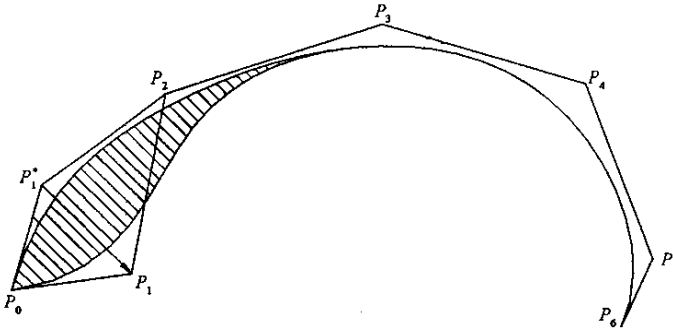


图 1 单拐 NURBS 曲线的拐点

Fig.1 Inflection point on a NURBS curve of polygon with one inflection point

应用引理 3 及 Goodman 定理,还可以证明更一般的情况。

**定理 4\*** 在端点具有  $p + 1$  重节点的  $p$  次 NURBS 曲线的控制多边形是正则的且只有一个拐点  $P_k$  ( $0 < k < n$ ),则该 NURBS 曲线一定有且只有一个拐点。

### 2.2 M 多边形 NURBS 曲线的拐点分析

平面上五个点  $P_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ),其四个顶点  $P_0, P_1, P_3, P_4$  构成凸三角形,另一个顶点  $P_2$  在射线  $P_1P_0, P_3P_4$  所张的区域里(不包括  $P_1P_0, P_3P_4$  及其延长线),形状像英文字母 M。M 多边形是最简单的双拐多边形,其 NURBS 曲线可以表示为:

$$r(t) = \sum_{i=0}^4 P_i R_i(t) = P_0 R_0(t) + P_1 R_1(t) + P_2^* R_2(t) + P_3 R_3(t) + P_4 R_4(t) + \Delta P_2 R_2(t)$$

$$\Delta P_2 = P_2 - P_2^*, \quad P_2^* = (P_1 + P_3)/2$$

记:

$$r_1(t) = P_0 R_0(t) + P_1 R_1(t) + P_2^* R_2(t) + P_3 R_3(t) + P_4 R_4(t)$$

$$r_2(t) = \Delta P_2 R_2(t)$$

那么,  $r(t)$  是凸曲线  $r_1(t)$  与  $r_2(t)$  的叠加。这种叠加表现为对于任意  $t \in [u_4, u_5]$ ,  $r_1(t)$  沿着  $\overrightarrow{P_2^* P_2}$  的方向移动  $\|L(t)\| = |\overrightarrow{P_2^* P_2}| R_2(t)$ 。

依据 NURBS 的端点切矢性质,变形前后曲线在两端点转向矢量的方向没有改变,故变形后可能在曲线的中间部分失去原有凸性。根据引理 3 及 Goodman 定理,变形后若曲线上任意点转向矢量都与两端点转向矢量同向,则曲线不出现拐点,否则必定出现两个拐点并且两拐点间曲线段的转向矢量与两端点转向矢量反向。由于两拐点间曲线段上所有点的转向矢量都具有相同方向,因此可以选择其中任一点来研究。由于目前的情形满足定理 3 的各项条件,故如果变形后出现拐点,则  $\|L(t)\|$  的峰值必然在两个拐点之间。从而得到:

**定理 5** M 多边形 NURBS 曲线出现拐点的充分必要条件是曲线在  $\|L(t)\|$  峰值对应点的转向矢量与端点转向矢量的方向相反。

不难发现,定理 5 将 M 多边形 NURBS 曲线拐点的判定集中在  $|\overrightarrow{P_2^* P_2}| R_2(t)$  峰值上,减少了计算量,也易于得到交互控制、消除曲线拐点的算法。对于一般 NURBS 而言,考虑到修改顶点  $P_k$  只影响区

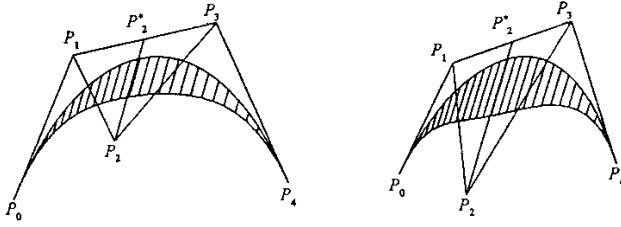


图2 M多边形 NURBS 曲线

Fig.2 NURBS curves of M-shaped control polygon

间  $u_k, u_{k+p+1}$  对应的曲线段,故上述方法可推广到一般简单双拐控制多边形的情形。因篇幅所致,这里不赘述。

### 参考文献:

- [1] Manocha D, Canny J F. Detecting Cusps and Inflection Points in Curves[J]. CAGD, 1992, 9(1):1-24.
- [2] Carnicer J M, Goodman T N T, Pena J M. A Generalisation of the Variation Diminishing Property[J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 3(4):375-394.
- [3] Li Y M, Cripps R J. Identification of Inflection Points and Cusps on Rational Curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, 14(5):491-497.
- [4] Sakai M. Inflection Points and Singularities on Planar Rational Cubic Curve Segments[J]. CAGD, 1999, 16(1):149-156.
- [5] Liu Chaoyang. Theory and Application of Convex Curves and Surfaces in CAGI[D]. The Netherlands: Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente, 2001.
- [6] Piegl L. Modifying the Shape of Rational B-splines, Part 1: Curves[J]. CAD, 1989, 21(8):509-518.
- [7] Javier S R. A Simple Technique for NURBS Shape Modification[J]. IEEE CG&A, 1997, 1(2):52-59.
- [8] Juhász I. Weight-based Shape Modification of NURBS Curves[J]. CAGD, 1999, 16(3):377-383.
- [9] 王兴波, 石金龙, 文锦. 一个分析计算拐点的可靠判据[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2004, 17(2):19-24.
- [10] 石金龙, 王兴波. NURBS 端点性质的数学推导[J]. 长沙大学学报, 2003, 17(4):16-21.



