

文章编号: 1001- 2486(2004) 06- 0015- 06

Walker 星座自主定轨误差分析*

张 艳¹, 张育林²

(1. 国防科技大学航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 装备指挥技术学院, 北京 101416)

摘要:通过对 Walker 星座中卫星间的相对运动进行分析, 给出星间相对距离的解析表达式及其对轨道根数的偏导数, 直观地描述在同轨道面和异轨道面的星间观测对轨道根数变化的体现情况; 根据星座中卫星的相对位置, 提出合理的约束条件和平差方法, 利用星间测距网实现星座的整网定位; 通过仿真算例, 比较在不同情况下, 采用合适的整网定位方法对轨道根数的系统误差和随机误差修正的情况。

关键词: Walker 星座; 整网定位; 星间测量

中图分类号: V448. 224 文献标识码: A

Error Analysis of Autonomous Orbit Determination for Walker Constellation

ZHANG Yan¹, ZHANG Yu-lin²

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2 The Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

Abstract: Since there are more and more satellites in the constellation, autonomous position determination by using single satellite has been gradually replaced by the whole autonomous navigation by using the inter-satellite relative observation in the constellation. Based on analyzing inter-satellite relative movement for Walker constellation, the resolution expression of the inter-satellite relative distance and the partial derivative with respect to orbit elements are presented firstly. The variation of orbit elements in the inter-satellite measurement is intuitively described in the same orbit plane and different orbit plane. Secondly, based on the relative position of satellites in the constellation, rational restriction and estimation method is put forward. The orbit determination of the whole network of the constellation is realized using the measurement of the inter-satellite distance. Finally, modified results of the orbit elements' system error and random error are compared in different instance using the rational orbit determination method by way of example.

Key words: Walker constellation; orbit determination of whole network; inter-satellite measurement

随着卫星应用需求的日益发展, 特别是 20 世纪 80 年代以来, 越来越多的飞行任务仅靠单颗卫星早已不可能完成, 于是由多颗卫星组成的卫星星座开始引起人们的关注, 成为许多飞行任务的首选方案。卫星星座中的卫星数目往往较多, 采用单星自主定位显然不是好方法。目前星座的自主定轨, 主要依赖于星座的星间相对测量进行相对自主导航研究。国外对利用星间相对测量信息进行自主导航做了广泛的研究, 提出了许多导航方法。例如, 日本空间和宇航科学院正在开发的利用微型激光扫描测距仪进行相对位置、姿态确定的方法, Ananda 进行的“GPS 卫星自主导航”研究^[1], Abusali 进行的“通过星间交联测距实现 GPS 自主导航”研究^[2]和 Herklotz 进行的“轨道确定过程中的联合交联测距以提高星座自主性”研究。同时, 国内也对星座的相对导航做了部分研究工作, 文献[3]对于利用星间测量进行星座自主定轨的基准秩亏作了理论分析, 而文献[4~6]则提出了一系列的方案和应用方法。

1 Walker 星座星间相对距离的几何分析

由文献[3]可知, 星-星跟踪定轨出现问题的主要原因是轨道面不确定所致, 即两星轨道发生整体

* 收稿日期: 2004- 07- 01

基金项目: 国家部委预研基金资助项目(413200101)

作者简介: 张艳(1975-), 女, 博士生。

漂移。现有的星座大多为 Walker 星座, 下面就以 Walker 星座为例, 分析星间观测对轨道根数的影响情况, 首先将卫星都投影到地球上, 通过球面三角形给出星间的球面距离的解析表达式, 如图 1 所示。

由于球面三角形 $AA'C$ 和 $BB'C$ 全等, 解球面三角形, 得

$$\langle AA' \rangle = \langle BB' \rangle = \arctan \left[\tan \frac{\Delta\Omega}{2} \cos i \right] \quad (1)$$

其中, 符号 $\langle k_1 k_2 \rangle$ 表示球面上弧段 $k_1 k_2$ 对应的球面角, $\Delta\Omega = \langle AB \rangle = \Omega_j - \Omega_i$, 为两轨道面升交点赤经之差, 考虑球面三角形 NAB 有

$$\begin{aligned} \cos \Delta\Omega_0 &= -\cos i \cos(\pi - i) + \cos \Delta\Omega \sin i \sin(\pi - i) \\ &= \cos^2 i + \sin^2 i \cos \Delta\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

同时有:

$$\langle NS_1 \rangle = a_0 = 90^\circ - u_i + \arctan \left[\tan \frac{\Delta\Omega}{2} \cos i \right] \quad (3)$$

$$\langle NS_2 \rangle = b_0 = a_0 - \Delta u + 2 \arctan \left[\tan \frac{\Delta\Omega}{2} \cos i \right] \quad (4)$$

式中, 卫星相角差 $\Delta u = u_j - u_i$ 。由球面三角形 $NS_1 S_2$ 可知星间距离对应的地心角为:

$$\cos \alpha = \cos a_0 \cos b_0 + \sin a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0, \quad \Delta\Omega_0 \in (0, \pi) \quad (5)$$

根据余弦定理可得星间距离为:

$$L_{ij} = r_j^2 + r_i^2 - 2r_i r_j \cdot \cos \alpha \quad (6)$$

其中, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$, 考虑 Walker 星座是同一类型的轨道, 因此 $a_i \approx a_j$, $e_i \approx e_j \sim O(10^{-8})$, 这样星间距离式(6)可以简化为:

$$L_{ij} = r\alpha = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \alpha \quad (7)$$

由此可以看出: 地心距主要与半长轴 a 、偏心率 e 以及真近点角 f 有关, 地心角主要与轨道倾角 i 、升交点赤经差 $\Delta\Omega$ 以及近地点角 w 相关。为简单起见, 下面选择 a 、 e 、 i 、 Ω 、 w 、 f 为基本轨道根数, 针对二体问题进行分析。

1. 同轨道面情况(即 $i_i = i_j$ 、 $\Omega_i = \Omega_j$)

星间距离对应的地心角为

$$\cos \alpha = \sin u_i \sin u_j + \cos u_i \cos u_j = \cos(\Delta u)$$

星间距离为

$$L_{ij} = r \cdot \Delta u = r \cdot \Delta f \quad (8)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial L_{ij}}{\partial i} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial \Omega} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial w} = 0 \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial a} = \frac{r}{a} \Delta f \approx \Delta f \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial e} = \left[-\frac{2ae}{1+e\cos f} - \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)^2} \right] \cdot \Delta f \approx -a\cos f \cdot \Delta f \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial f} = \frac{r^2 e}{a(1-e^2)} \sin f \cdot \Delta f \sim O(10^{-3}) \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)可以看出, 同轨道面卫星星间相对距离不含有 i 、 Ω 的变化信息, 在二体问题或仅考虑摄动力主项 J_2 情况下, 也不含 w 的变化信息, 因此在同轨道面内星间观测基本上是不能对 i 、 w 、 Ω 进行修正的。当轨道是近圆轨道时, 对真近点角 f 的偏导较小, 近似为零, 表示星间测距对 f 的变化不敏感, 因此修正效果较差。而轨道根数 a 、 e 的变化是可以在星间相对距离的变化中得到体现的, 也就是说可以通过星间测距网进行修正。

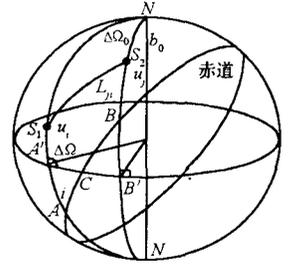


图1 两卫星相对位置示意图
Fig. 1 Sketch of relative position of two satellites

2. 异轨道面情况(即 $i_i = i_j$)

异轨道面的星间相对距离为

$$L_{ij} = r\alpha = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}\alpha$$

将各轨道根数的变化情况体现在星间相对距离的变化上, 对轨道根数进行偏导, 得:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L_{ij}}{\partial i} &= r \frac{\partial(\alpha)}{\partial i} \\ &= -\frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \left[\frac{\tan \frac{\Delta\Omega}{2} \sin i}{1+\tan^2 \frac{\Delta\Omega}{2} \cos^2 i} (\sin a_0 \cos b_0 + 2\cos a_0 \sin b_0 - \cos a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0) \right. \\ &\quad \left. - 2\sin a_0 \cos b_0 \cos \Delta\Omega_0 - 2\sin a_0 \sin b_0 \sin \Delta\Omega_0 \sin i \cos i (\cos \Delta\Omega - 1) \right] \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial w} &= r \frac{\partial(\alpha)}{\partial w} = -\frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (\sin a_0 \cos b_0 - \cos a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0) \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial \Omega} &= 0, \quad \frac{\partial L_{ij}}{\partial a} = \frac{r}{a}\alpha \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial e} &= \left[-\frac{2ae}{1+e\cos f} - \frac{a(1-e^2)\cos f}{(1+e\cos f)^2} \right] \cdot \alpha \approx -a\cos f \cdot \alpha \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial f} &= \frac{r^2 e}{a(1-e^2)} \sin f \cdot \alpha - \frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (\sin a_0 \cos b_0 - \cos a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0) \\ \frac{\partial L_{ij}}{\partial f} &= \frac{r^2}{a(1-e^2)} \sin f \cdot \alpha - \frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (\sin a_0 \cos b_0 - \cos a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0) \\ &\approx -\frac{r}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (\sin a_0 \cos b_0 - \cos a_0 \sin b_0 \cos \Delta\Omega_0) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

由以上偏导数可以看出, 异轨道面卫星的星间相对距离中包含了 i, w, f 的变化, 而且星间相对距离对 w, f 的偏导数在近圆轨道的情况下量级相当。但卫星间距离只与升交点赤经之差相关, 如果卫星间轨道进动量一致, 即 $\Delta\Omega$ 为常数, 星间距离是无法体现出升交点赤经之间的变化的。

由以上分析可知, 对于 Walker 星座, Ω 的变化是无法在星间相对距离中得到体现的, 而 i, w 的变化在同轨道面的星间观测中是不能得到体现的, 同轨道面观测对 f 也不敏感, 也就是说, 对于近圆轨道, 同轨道面卫星星间观测只能修正 a, e 两个轨道根数。当存在异轨道面观测时, 除 Ω 外的轨道根数的变化都是可以通过星间距离的变化得到体现的。对于 f 这个与时间相关量的修正情况基本上与 w 等同。

2 星座整网定位模型

设整个星间测距网的观测方程为:

$$L = AX + \Delta \quad (11)$$

则误差方程可表示为:

$$V = A\delta X - l, \quad l = L - AX_0 \quad (12)$$

其中, 在此假设网中卫星数为 n , 独立观测基线数为 m , 则 L 表示星间距离观测值, Δ 表示测量真误差, V 表示距离观测量的残差, 它们分别为 $m \times 1$ 维矩阵; A 为 $m \times 3n$ 维系数矩阵; X_0, X 分别为卫星的概略坐标和真实坐标, δX 为卫星坐标的修正值, 它们分别为 $3n \times 1$ 维矩阵。具体的表达式请参考文献 [4]。

由于星间测距构成的自由网存在基准秩亏问题, 因此采用最小二乘方法无法求得惟一解, 下面针对不同情况, 采用不同的平差方法进行求解。

2.1 有先验信息

充分利用卫星的先验信息,将卫星位置作为随机量,顾及其权阵的影响,解法方程系数矩阵的秩亏问题,文中采用参数加权平差方法^[4],最终最小二乘的估值为:

$$\delta \mathbf{X}_{3n \times 1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_L \mathbf{A} + \mathbf{P}_X)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_L \mathbf{l} \quad (13)$$

其中, \mathbf{P}_L 为观测量的权矩阵; \mathbf{P}_X 为预估轨道坐标的权矩阵。

2.2 先验信息不准

如果卫星的先验信息未知或精度太低不易采用时,可以考虑采用有偏估计方法,较常用的有偏估计方法有岭估计和广义岭估计。由于星座中可能存在各种轨道类型的卫星,因此其初始轨道的精度不同,采用广义岭估计更具有一般性。

对 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 进行正交分解

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix} \mathbf{G}^T, \quad \mathbf{y} = \mathbf{G}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

则广义岭估计定义为:

$$\mathbf{X}_{\alpha} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{G} \mathbf{K} \mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (14)$$

对于岭参数 \mathbf{K} 的选择是广义岭估计的关键所在,本应选择使 $\text{MSE}(\mathbf{X}_{\alpha})$ 达到最小的 \mathbf{K} ,但 \mathbf{K} 的最优值不但依赖未知数的 σ_0^2 , \mathbf{X} , 而且这种关系没有显式表示。统计学家作了许多的工作,提出了 10 余种选 \mathbf{K} 的方法,但目前没有一个方法一致地优于其他方法。下面给出 Hemmerle-Brantle 公式,

$$k_i = \frac{\sigma_0^2}{y_i^2 - \sigma_0^2 / \lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r \quad (15)$$

当 $y_i^2 - \sigma_0^2 / \lambda_i \leq 0$ 时,取 $k_i = \infty$ 。

2.3 带有约束的整网定位

卫星之间的相对运动规律是可以表达为一定的约束条件的。对于 Walker 星座,它是一种在轨道面内均布的星座构形,因此同轨道面内的卫星满足:

$$\sum_{i=1}^k x_i = \delta_x, \quad \sum_{i=1}^k y_i = \delta_y, \quad \sum_{i=1}^k z_i = \delta_z$$

其中, k 为同轨道面内均布的卫星数, $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 均为时变小量,在计算中可以采用理想的情况,即 $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$, 将其统一表示为

$$\mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

则上式约束条件化为:

$$\mathbf{B} \delta \mathbf{X} - \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} = -\mathbf{B} \mathbf{X}_0 \quad (16)$$

其中, \mathbf{B} 是约束方程的系数阵,由 0 和 1 元素组成。

对于其他类型的星座,由于其具有特殊性,它的约束条件也不尽相同,在此不作详述。在此提出利用带有约束的参数加权平差方法进行先验值较准情况下的星座整网定位方法。首先组成新函数为:

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P}_L \mathbf{V} + \delta \mathbf{X}^T \mathbf{P}_X \delta \mathbf{X} + 2 \mathbf{K}_1^T (\mathbf{B} \delta \mathbf{X} - \mathbf{W}) \quad (17)$$

对 $\delta \mathbf{X}$ 求偏导,并令其为零,可写成:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_L \mathbf{V} + \mathbf{P}_X \delta \mathbf{X} + \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$$

令

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_L \mathbf{A} + \mathbf{P}_X, \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_L \mathbf{l}$$

则

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{U} - \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1) \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_1 = (\mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{U} - \mathbf{W}) \quad (19)$$

(18) 式和 (19) 式即为法方程的解。

3 数值仿真与分析

这里通过数值方法对不同类型轨道的卫星的修正情况进行仿真分析, 通过星间测距网完成某个时刻对各轨道根数引起的系统误差和随机误差的修正(在此不考虑速度的修正情况)。

以高度为 10 350km 的 Walker 星座作为自主定位的卫星网, 星座的特征码为 18/3/0 53°, 假设卫星在时刻 t_0 进行星间相对距离观测(双向观测), 各相对距离的观测值的均方差为 $\sigma_L = 5\text{m}$ (对轨道根数引起的系统误差修正采用广义岭估计方法, 对随机误差采用带有约束的参数加权平差方法)。其中轨道根数引入的系统误差为: 半长轴 $\Delta a = 2000\text{m}$, 偏心率 $\Delta e = 1e-4$, 轨道倾角 $\Delta i = 0.2^\circ$, 升交点赤经 $\Delta \Omega = 0.2^\circ$, 近拱点角 $\Delta w = 0.2^\circ$, 平近点角 $\Delta M = 0.2^\circ$ 。

1. 考虑同轨道面的 6 颗卫星的情况

由表 1 的仿真结果可以看出, 利用某一时刻同轨道面星间测距网只能对轨道根数 a, e 进行修正, 这一结果证明了上面分析的结论。

表 1 同轨道面轨道根数系统误差修正结果

Tab. 1 Corrected results of orbit elements' system error in same orbit plane

		轨道根数系统误差引入的位置误差			平差后位置误差		
		$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$	$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$
轨道 根数	a	1414. 213550	851. 094993	1129. 441166	0. 455337	0. 684275	0. 908064
	e	2577. 979441	355. 930895	472. 336235	2509. 220973	0. 686419	0. 910908
	i	0. 000000	33 018. 591 326	24 791. 060434	0. 455999	33 018. 368590	24 791. 358195
	Ω	24 848. 717608	41 289. 474 171	0. 000000	24 848. 385666	41 289. 673702	0. 907775
	w	41 289. 515021	24 848. 650513	32 975. 271905	41 289. 183278	24 848. 850274	32 975. 536996
	M	41 289. 515021	24 848. 650513	32 975. 271905	41 289. 183278	24 848. 850274	32 975. 536996

2. 利用星座中所有卫星进行平差处理

由表 2 给出的仿真结果可以看出, 利用不同轨道星间测距网进行整网处理对轨道根数 a, e, i 的修正效果非常好, 对 w, M 也有一定修正的效果(主要对 z 轴方向的位置进行了修正), 由于平近点角 M 与时间相关, 通过增加一段时间的观测, 可能会取得较好的修正效果。但对于升交点赤经 Ω 是无法进行修正的。

表 2 异轨道面轨道根数系统误差修正结果

Tab. 2 Corrected results of orbit elements' system error in different orbit plane

		轨道根数系统误差引入的位置误差			平差后位置误差		
		$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$	$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$
轨道 根数	a	1414. 213550	851. 094993	1129. 441166	0. 455337	0. 684275	0. 908064
	e	1167. 125246	1167. 125234	1129. 441166	0. 707535	0. 756246	0. 979063
	i	23 347. 669591	23 347. 670073	24 791. 060434	27. 703904	27. 460307	33. 858703
	Ω	34 075. 500156	34 075. 500483	0. 000000	34 075. 553484	34 075. 446991	0. 979056
	w	34 075. 500770	34 075. 500441	32 975. 271905	30 109. 399807	30 109. 293747	25. 551378
	M	34 075. 500770	34 075. 500441	32 975. 271905	30 109. 399807	30 109. 293747	25. 551378

3. 随机误差的修正

以上两种情况是考虑星座中所有卫星的轨道根数都是同一个变化趋势, 即考虑它们系统误差的影响, 下面主要考虑星座中卫星轨道根数的误差服从高斯分布时的修正情况。其中, 半长轴的误差的均方

差 $\sigma_a = 2000\text{m}$, 偏心率 $\sigma_e = 1\text{e}-5$, 轨道倾角 $\sigma_i = 0.002^\circ$, 升交点赤经 $\sigma_\Omega = 0.002^\circ$, 近拱点角 $\sigma_w = 0.002^\circ$, 平近点角 $\sigma_M = 0.002^\circ$ 。

由表 3 的仿真结果可以看出, 对于轨道根数的随机误差, 采用合适的整网平差方法基本上都可以得到很好的修正, 这是由于星间测距网具有良好的几何约束的原因。

表 3 异轨道面轨道根数随机误差修正结果

Tab.3 Corrected results of orbit elements' random error in different orbit plane

		轨道根数随机误差引入的位置误差			平差后位置误差		
		$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$	$\sigma_x(\text{m})$	$\sigma_y(\text{m})$	$\sigma_z(\text{m})$
轨道 根数	a	1041.930164	1289.997660	929.934649	2.844234	16.078742	17.242940
	e	141.643780	178.347385	43.250129	8.928006	24.485501	25.994207
	i	214.484822	166.467584	204.592614	75.253442	75.990506	27.290685
	Ω	376.630073	304.201933	0.000000	175.142764	77.733800	19.131809
	w	303.236419	305.539446	350.424265	51.371154	78.590960	73.393404
	M	303.236419	305.539446	350.424265	51.371154	78.590960	73.393404

4 结论

在卫星星座利用星间测距网进行自主定位时存在条件方程秩亏问题, 升交点赤经 Ω 总是秩亏的, 而轨道倾角 i 和近拱点角 w 在同轨道面观测时也是秩亏的。对于 Walker 星座, 当星座中卫星在同一轨道面时, 利用星间测距网只能对轨道根数 a, e 的系统误差进行修正; 当星座中存在异轨道面卫星时, 利用星间测距网对轨道根数 a, e, i 的系统误差可以进行很好的修正, 对轨道根数 w, m 可作部分修正, 而对于升交点赤经的系统误差是无法修正的, 只有固定其中某一颗卫星的升交点赤经, 才能对其他卫星进行相对修正; 对于轨道根数的随机误差, 采用合适的整网平差方法基本上都可以得到很好的修正。

参考文献:

- [1] Ananda M P, Bernstein H, Bruce R W, et al. Autonomous Navigation of the Global Position System Satellites [A]. AIAA Paper 84-186, Aug. 1984.
- [2] Alusali P A M, Tapley B D, Schutz B E. Autonomous Navigation of Global Position System Satellites Using Cross-link Measurements [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 321-327.
- [3] 刘迎春. 航天任务轨道支持中的两个问题——天地基联合定轨方法和月球探测器轨道支持 [D]. 南京大学, 1999.
- [4] 张艳, 张育林. 星座自主导航系统设计与实现 [J]. 宇航学报, 2003, 24(5): 525-528.
- [5] 郝晓宁, 张雅声, 任萱, 等. 利用星载 GPS 伪码测距进行小卫星星座的整网定位 [J]. 国防科技大学学报, 1998, 20(6): 12-16.
- [6] 阎野. 提高卫星星座定位自主性和精度的研究 [D]. 国防科技大学博士学位论文, 2000.