

文章编号: 1001- 2486(2004) 06- 0054- 04

并联机构奇异点的运动分岔研究*

沈 辉, 吴学忠, 李泽湘

(国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 采用静态分岔理论研究一般并联机构在奇异点处的运动分岔现象。通过约束方程研究了儿种简单机构在驱动奇异和末端执行器奇异下的不同分岔类型, 并研究了机构参数对分岔性态的影响。指出非持久性奇异分岔可以通过调整机构参数转换为持久性奇异分岔, 从而克服机构在奇异点邻域内的运动不确定性。

关键词: 并联机构; 奇异点; 分岔; 微分流形

中图分类号: TH112 文献标识码: A

Motion Bifurcation at Singularities of Parallel Mechanisms

SHEN Hui, WU Xue zhong, LI Ze xiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The elementary bifurcation theory is utilized to study the bifurcation of singularities of general parallel mechanisms. Based on constraint equations, some typical motion bifurcation of simple parallel mechanisms are researched and they can be classified into different styles by codimensions of constraint equations at actuator singular points or end effector singular points. Finally, this paper discusses how the disturbance of mechanism parameters affects the bifurcation diagram of singularities and results show that those nonpersistent bifurcations of parallel mechanisms can be transformed into those persistent bifurcations so that the motion uncertainty at singularities can be overcome.

Key words: parallel mechanisms; singularity; bifurcation; differential manifold

近年来, 并联机构的奇异性研究已引起国内外学者的广泛兴趣^[1-5]。一方面, 奇异性给并联机构的控制和性能带来很大影响^[2]; 另一方面, 奇异性可能导致机构通过奇异点时出现运动分岔现象^[1], 此时机构局部运动流形的拓扑结构发生改变, 从而使得按照原有构形设计的控制器失效, 甚至导致整个系统失稳, 这称之为并联机构的构形保持问题。文献[1]研究了串联机构奇异点的分岔; 文献[6]采用奇异性理论对平面 3 自由度机构的分岔性态及其构形稳定性进行了研究, 并讨论了输入构件长度误差等扰动因素对分岔点构形保持性的影响。

本文将文献[1]和[6]的研究结果扩展到对一般并联机构的奇异分岔研究, 着重讨论并联机构在不同奇异点处的分岔分类和稳定性问题。

1 静态分岔理论

定义 1 考虑静态方程

$$F(x, \mu) = 0, \quad x \in U \subseteq X, \mu \in J \subseteq R^m \quad (1)$$

其中, $C^r (r \geq 1)$ 映射 $F: U \times J \rightarrow Y, X, Y$ 为巴拿赫空间, μ 是参数。设 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 是式(1)的解, 即 $F(x_0, \mu_0) = 0$ 。取 (x_0, μ_0) 的某个足够小的邻域 $\Omega \subset U \times J$ 。记 $n(\mu)$ 为当 μ 固定时方程(1)在 Ω 内的解 (即函数 F 的零点) 的数目, 如果当 μ 变化经过 μ_0 时, $n(\mu)$ 发生突然变化, 则称 F 在 (x_0, μ_0) 处出现静态分岔, (x_0, μ_0) 称为静态分岔点, μ_0 为静态分岔值。

可以证明^[7], (x_0, μ_0) 为静态分岔点的必要条件是该点为方程(1)的奇异点, 即

* 收稿日期: 2004- 06- 08

基金项目: 国家自然科学基金—香港青年学者合作研究基金资助项目 (50029501)

作者简介: 沈辉 (1975—), 男, 博士生。

$$\nabla_x F(x, \mu) \Big|_{(x_0, \mu_0)} = 0 \quad (2)$$

因此并联机构的运动分岔一定发生在奇异点处,但机构不一定在所有奇异点处均发生运动分岔现象。

一般研究的是机构在单变量变化下的静态分岔问题,即考虑一维静态分岔方程

$$g(x, \mu) = 0, \quad x \in U \subset R, \mu \in V \subset R \quad (3)$$

其中 $(0, 0) \in U \times V$, 芽 $g \in \mathcal{E}_{\varepsilon, \mu}$, 并满足 $g(0, 0) = g_x(0) = 0$ (即 $(0, 0)$ 是 g 的奇异点)。

对于多维分岔方程,通常可以利用 LS 约化方法将原来的方程降维。有时降维以后的方程很复杂,或者根本无法得到它的表达形式,这时可以通过识别条件确定与 g 强等价的某些简单且有代表性的多项式函数 $h(x, \mu)$, 称为 GS 范式。由于 $g(x, \mu)$ 和 $h(x, \mu)$ 之间可通过局部微分同胚 (X, M) 相互变化,它们在原点附近具有相同的分岔特性。

定理 1^[7] 定义 $g \in \mathcal{E}_{\varepsilon, \mu}$ 的切空间

$$T_g(g) = \{a(x, \mu)g + b(x, \mu)g_x + c(\mu)g_\mu\}$$

其中, $a, b \in \mathcal{E}_{\varepsilon, \mu}$, $c \in \mathcal{E}_\mu$, $T(g)$ 是芽空间 $\mathcal{E}_{\varepsilon, \mu}$ 的子空间, g 的余维数等于切空间 $T(g)$ 的余维数,即 $\text{codim}g = \text{codim}T(g) = k$ 。

g 的余维数大小反映了奇异点的退化程度,因此余维数在静态分岔的分类问题中起着重要的作用。研究表明,若 $(0, 0)$ 是 g 的奇异点,且 $\text{codim}g \leq 3$, 则 g 必与 11 种 GS 范式中的某个强等价,也就是说,余维数不大于 3 的奇异点只有 11 种静态分岔性态。因此这些 GS 范式静态分岔图基本概括了一般并联机构在奇异点处的不同运动分岔类型。

通过引入附加参数,研究参数扰动对静态方程(3)的分岔性态影响的方法称为开折(unfolding)方法。所含参数的数目最少的开折称为普适开折,其开折参数等于 g 的余维数。因此静态方程的普适开折包含了 g 的所有扰动函数,可以用来研究方程 $g = 0$ 受扰后可能出现的各种分岔性态。一般通过普适开折的识别条件来判定或构造与某个 GS 范式强等价的静态方程的普适开折。

研究静态方程普适开折的一个重要问题是研究其分岔图的持久性。

定义 2 如果对 $\alpha \in R^k$ 的一个邻域 U 中的任何 β , 开折 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 与 $G(\cdot, \cdot, \beta)$ 接触等价,从而当 $G(x, \mu, \alpha)$ 受到小扰动时,分岔图的定性性态保持不变,则称 G 在 α 处的分岔图是持久(或通用、稳定)的;否则,分岔图是非持久(或退化、不稳定的)。

研究表明,当开折参数 α 属于一类转迁集 Σ 时,其分岔图是非持久的,否则 $G(\cdot, \cdot, \alpha)$ 的分岔图是持久的,并可按 Σ 将参数空间分成的不同子区域作进一步的分类。因此一般并联机构约束方程的普适开折提供了机构位形参数空间的结构和选择适当的组合参数的重要信息,可以作为机构优化或构造构型保持曲线的理论依据^[6]。

图 1 显示了利用约束方程研究并联机构奇异分岔性态的一般过程。

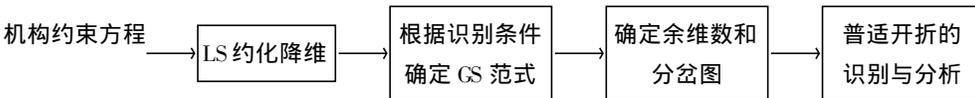


图 1 研究并联机构奇异分岔的一般过程

Fig. 1 Bifurcation analysis at singularities of parallel mechanisms

2 驱动奇异分岔

并联机构的驱动奇异性(actuator singularity)是由于在并联机构中引入驱动关节所引起的。当机构运动到位形空间某点 $p \in Q$ 处,所引入的驱动关节速度不能完全决定其他被动关节的运动速度,换句话说,所采用的驱动关节不能局部参数化当前位形的邻域空间,就出现了驱动奇异位形^[2]。

位形空间上的驱动奇异点通常出现在机构运动学正解的不同解分支的交点处。对于如下的约束方程

$$H(\theta_a, \theta_p) = [h_1(\theta), \dots, h_{n-m}(\theta)]^T = 0 \quad (4)$$

其中, $\theta = [\theta_a, \theta_p]^T$ 为所有机构运动关节坐标。已知驱动关节 θ_a 坐标, 方程(4)可能出现多个被动关节 θ_p 解。当机构驱动通过驱动奇异点时, 方程(4)的解的个数通常发生改变, 从而出现运动分岔现象。因此约束方程(4)的静态分岔图可以清楚地反映机构在驱动奇异点附近的分岔性态。

如果研究位形空间的几何拓扑, 驱动奇异点出现在位形空间的“皱折”点处。例如对于如下的约束方程

$$H(\theta) = 4\theta_1^3 + 2\theta_3\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad (5)$$

其位形空间 Q 及其向驱动关节平面 (θ_2, θ_3) 的投影如图2所示。

在位形空间上有垂直切线的点满足

$$\nabla_{\theta_1}(H(\theta)) = 12\theta_1^2 + 2\theta_3 = 0 \quad (6)$$

这些点称为驱动奇异点^[2,4], 它们的全体组成奇异点集合 S 。 S 在驱动关节平面 (θ_2, θ_3) 上的投影 B 称为分岔集。从方程(5)和(6)消去 θ_1 , 便得到分岔集的方程

$$8\theta_3^2 - 27\theta_2 = 0 \quad (7)$$

分岔集 B 将平面 (θ_2, θ_3) 分成 Ω_1 和 Ω_2 两个区域, 容易见到, Ω_1 、 B 和 Ω_2 区域分别对应于约束方程(5)的一个、两个或三个不同解, 从而并联系统(5)在集 B 处出现静态分岔。在集 B 上, 除了尖点 O 对应于余维数为2的分岔之外, 其他地方对应余维数为1的分岔。

图2还显示, 当 θ_2 出现扰动时, 驱动变量分别沿 (θ_2, θ_3) 平面的曲线 $C_{1,2,3}$ 变化, 从而导致静态分岔图的变化。因此对系统施加一定的扰动, 可以改变机构在奇异点处的局部分岔性态, 从而使机构沿预定的轨道通过奇异点。

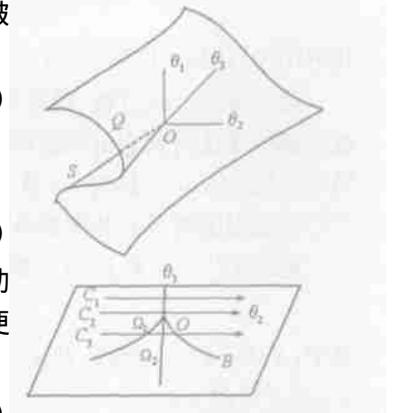


图2 位形空间及其投影
Fig. 2 The configuration space and the project mapping

3 末端执行器奇异分岔

并联机构的末端执行器奇异性(end effector singularity)是由于在并联机构中引入末端执行器坐标所引起的。位形空间上的驱动奇异点通常出现在机构运动学逆解的不同解分支的交点处。当采用的末端执行器坐标不能局部参数化当前位形的邻域空间, 机构出现末端执行器奇异位形^[2]。通过前向运动学方程 $x = f(\theta_a)$, 约束方程(4)可以写成末端执行器坐标形式

$$H(x, \theta_p) = [\bar{h}_1(x, \theta_p), \dots, \bar{h}_{n-m}(x, \theta_p)]^T = 0 \quad (8)$$

与驱动奇异分岔类似, 约束方程(8)的静态分岔图可以完全描述机构在末端执行器奇异位形处的运动分岔性态。

考虑图3的平面2自由度并联机构, $\theta_{1,2}$ 为驱动关节。当 $\theta_2 = \phi_2 = \omega_0$ 时, 机构处于末端执行器位形, 此时, 机构不能抵消沿 A_2C 的外力作用。为简单起见, 只考虑 A_2C 分支的运动分岔情况。设机构沿一圆弧轨迹 S 运动, 采用极坐标表示末端执行器位置

$$X_C = X_O + \rho \cos(-\omega - \omega_0), \quad Y_C = Y_O + \rho \sin(-\omega - \omega_0) \quad (9)$$

得到分支 A_2C 的分岔方程 $g(\phi_2, \omega) = 0$, 据此可研究当 $\mu = \omega$ 在零点附近变化时, 坐标 $x = \phi_2$ 的运动分岔。研究表明, 末端执行器奇异点的分岔性态与实际运动轨迹有关。此例中, 随着轨迹圆心 O 和半径 ρ 不同, 机构分别呈现出三种不同类型的分岔, 包括极限点、跨临界点和孤立点(如图3所示), 这与文献[1]中对串联机构奇异分岔的研究结果是一致的。

4 扰动对分岔的影响

依据开折原理, 静态方程(1)在受到扰动时, 其非持久分岔特性将发生改变, 因此可以采用对结构方程施加扰动的方法改变对机构不利的分岔性态^[6]。对于并联机构, 其分岔方程的普适开折可以反映分岔方程的所有扰动变化情况。在掌握机构分岔图的前提下, 对机构施加一定的扰动, 可以改变机构通过奇异点时的非持久性分岔性态, 使机构朝着预期的方向运动。然而对于持久性的奇异分岔, 对分岔方程

的扰动不会改变分岔的性态,因此具有持久分岔特性的奇异点,一般无法通过调整机构参数改变它的运动分岔特性。

考虑如图 4 所示的平面 5 杆机构。当 $\theta_{10} = 30^\circ$, $\theta_{20} = 81.33^\circ$, $\theta_{30} = 3.06^\circ$, $\theta_{40} = -3.06^\circ$ 时,机构处于一种驱动奇异位形。由约束方程可以得到其分岔方程为

$$L_1 \cos(\theta_1 + \theta_{10}) - L_2 \cos(\theta_2 + \theta_{20}) + L_4 \cos(\theta_4 + \theta_{40}) - \sqrt{L_3^2 - [L_1^2 \sin(\theta_1 + \theta_{10}) + L_4 \sin(\theta_4 + \theta_{40}) - L_2 \sin(\theta_2 + \theta_{20})]^2} - C = 0 \quad (10)$$

保持 θ_2 不变,分析 θ_1 在零点附近变化时, θ_4 的运动分岔。根据识别条件,方程(10)与 GS 范式 $-x^2 + \mu$ 强等价,因此方程(10)在 $\theta_1 = \theta_4 = 0$ 处呈现极限点分岔。

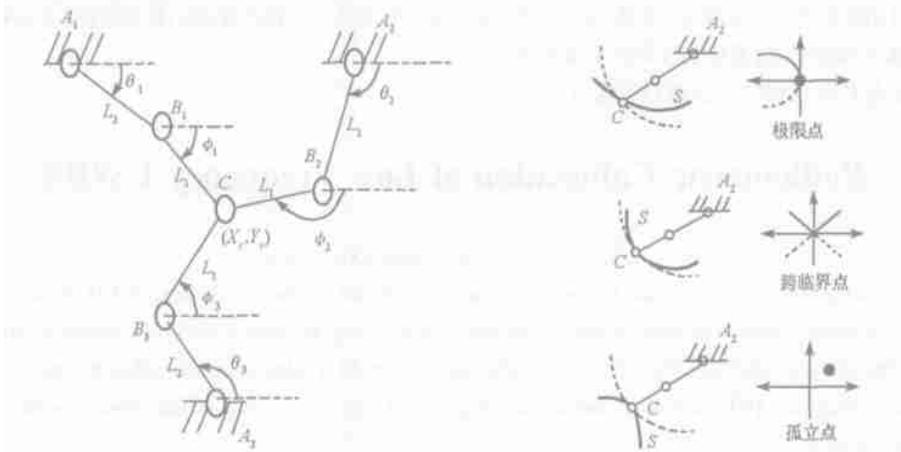


图 3 平面 2 自由度并联机构及其不同分岔性态

Fig. 3 The 2-DOF planar mechanism and various bifurcations

研究扰动对机构运动分岔的作用,可以从系统的大量机构参数中辨别出能反映结构稳定性本质的参数,从而从整体上认识系统的分岔性态和进行理论预测。

5 小结

与串联机构相比较,并联机构中的奇异点多且复杂,从而影响到并联机构的进一步推广和应用。采用静态分岔理论,通过几种典型机构的分析,对一般并联机构中的不同奇异分岔类型和在参数扰动下的退化性质进行了研究。对并联机构奇异运动分岔性态的深入研究,可以预测并通过一定方法控制机构通过奇异点的运动方向,甚至可以利用机构的奇异点来改变机构的当前运动构形,以满足特殊任务的需要。

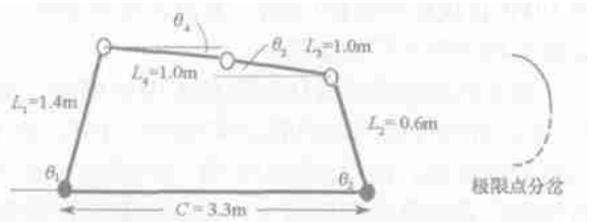


图 4 五杆机构驱动奇异及其极限点分岔图

Fig. 4 The actuator singularity of the five bar mechanism and its bifurcation diagram

参考文献:

- [1] Kieffer J. Differential Analysis of Bifurcations and Isolated Singularities for Robots and Mechanisms [J]. IEEE Transactions on Robots and Automation. 1994, 10(1): 1- 10.
- [2] Liu G F, Wu Y L, Li Z X. Analysis and Control of Redundant Parallel Manipulators [A]. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2001: 3748- 3754.
- [3] Merlet J P. Singular Configuration of Parallel Manipulators and Grassman Geometry [J]. Int. J. of Rob. Res., 1989, 8(5): 45- 56.
- [4] 沈辉, 吴学忠, 李圣怡, 等. 并联机构的奇异位形分析及冗余驱动控制方法 [J]. 国防科技大学学报, 2002, (2): 19- 22.
- [5] 沈辉, 吴学忠, 李泽湘. 并联机构中奇异性的稳定性问题 [J]. 国防科技大学学报, 2002, 24(5): 37- 40.
- [6] 王玉新, 王仪明, 刘学深. 并联机构构形分岔与保持性研究 [J]. 中国科学 (E 辑), 2003, 33(1): 56- 64.
- [7] 陆启韶. 分岔与奇异性 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.