文章编号:1001 - 2486(2004)06 - 0096 - 04

套利与记账单位的关系*

耿美华,金治明
(国防科技大学理学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:通常说一策略是套利策略,是指其初始资产为 0,而最后的资产以正概率严格大于 0,也就是无中生有。如果只是看净收益是否严格大于 0 还不能判断该策略是否是套利策略。当策略的初始资产不是 0 时,如何判断该策略是否是套利策略?将就套利给出另一种定义,并证明一策略是否为套利策略只要判断其折准净收益是否以正概率严格大于 0。给出了原市场和不同折准市场下无套利数学表达式的等价形式,并给出了在选择不同的记账单位作折准及对策略的不同要求(如:可取,折准可取,折准可取等)时无套利的数学表达式的等价形式。

关键词:套利;记账单位
中图分类号:O211.6 文献标识码:A

The Relation of Arbitrage and Numeraire

GENG Mei-hua, JIN Zhi-ming
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Generally speaking, a strategy Ψ is said to be an arbitrage if it makes something out of nothing without risk, i.e $V_T(\Psi)$ is strictly positive with positive probability and with its initial wealth 0. If the net capital gains are strictly positive with positive probability, we can't tell whether it is an arbitrage. How do you tell whether a strategy is an arbitrage with its initial wealth unequal to 0? We give another definition of arbitrage and have shown that judging whether a strategy is an arbitrage is to judge whether its discounted gains are strictly positive with positive probability. We give the equivalent expression forms in mathematics of the original market and different discounted markets with respect to no arbitrage, and correspondingly we get equivalent expression forms in mathematics with respect to no arbitrage with different strategy requirements.

Key words: arbitrage; numeraire

先来描述连续市场的一般模型。(Ω, F, P) 是一完备空间,(F_t) $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 满足通常条件,T 是固定有限值。假定 $F_0 = \{\phi, \Omega\}$,$F_T = F$。考虑由 $m+1$ 个资产构成的金融市场,每个资产价格过程 S^j 是严格正的半鞅。任选一个资产值作为记账单位,记为0资产。记 $\gamma_t = (S_t^0)^{-1}$,称 γ_t 为 t 时刻的折价因子。令 $S_t = (S_t^1, \cdots, S_t^m)$,那么 $\tilde{S}_t = (\tilde{S}_t^1, \cdots, \tilde{S}_t^m)$,其中,$\tilde{S}_t^j = \gamma_t S_t^j (1 \leqslant j \leqslant m)$。称 $(1, \tilde{S})$ 为折准市场,$(\tilde{S}_t)$ 为资产的折准价格过程,注意到此时0资产的折准价格过程恒为1。策略 $\Psi = \{\Psi^0, \overline{\Psi}\}$,是一 R^{m+1} - 值 F_{t-} 可料过程且关于半鞅 (S^0, S) 可积,其中 $\overline{\Psi} = (\Psi^1, \cdots, \Psi^m)$。$\Psi_t^j$ 表示 t 时刻持有 j 资产的份额 $(0 \leqslant t \leqslant T)$。策略 $\Psi = \{\Psi^0, \overline{\Psi}\}$ 的价值过程 $V_t(\Psi) = \Psi_t^0 S_t^0 + \overline{\Psi}_t \cdot S_t$,其中 $\overline{\Psi}_t \cdot S_t = \sum_{j=1}^m \Psi_t^j S_t^j$。记 $G_t(\Psi) = V_t(\Psi) - V_0(\Psi)$,并称 $G_t(\Psi)$ 为策略 Ψ 的净收益。相应地,$\tilde{G}_t(\Psi) = \tilde{V}_t(\Psi) - \tilde{V}_0(\Psi)$ 为策略 Ψ 的折准净收益,其中,$\tilde{V}_t(\Psi) = V_t(\Psi)\gamma_t$ 为 t 时刻策略 Ψ 的折准价值过程。

注:这里并没有对 S_t^0 做额外的限制,即不要求是银行存款的资产。

定义 1 称策略 $\Psi = \{\Psi^0, \overline{\Psi}\}$ 是自筹资策略,如果

$$V_t(\Psi) = V_0(\Psi) + \int_0^t \Psi_u \mathrm{d}(S_u^0, S_u)$$

* 收稿日期:2004 - 06 - 30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60003013)
作者简介:耿美华(1979—),女,硕士生。

显然自筹资策略构成一线性空间,且常向量也是自筹资策略。

命题 1 策略 $\Psi=\{\Psi^0,\overline{\Psi}\}$ 是自筹资的,当且仅当其折准价值过程满足

$$\mathrm{d}\tilde{V}_t=\overline{\Psi}_t\mathrm{d}\tilde{S}_t$$

其中,$\tilde{V}_t=V_t\gamma_t$。

该命题的证明见文献[1]中的定理 2.5。

命题 2 设 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 是自筹资的,那么任给定 $\hat{\Psi}_0^0$,可以找到 $\hat{\Psi}_t^0$,使得 $\hat{\Psi}=(\hat{\Psi}^0,\overline{\Psi})$ 是自筹资的,且 Ψ 同 $\hat{\Psi}$ 的折准净收益 $\tilde{G}_t$ 是相等的,均为 $\int_0^t\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}$。

证明 由 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 是自筹资的,得

$$\tilde{V}_t(\Psi)=\tilde{V}_0(\Psi)+\int_0^t\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}$$

$\hat{\Psi}$ 的初始资产为 $V_0(\hat{\Psi})=\hat{\Psi}_0^0S_0^0+\overline{\Psi}_0S_0=\nu$,取

$$\hat{\Psi}_t^0=\nu/S_0^0+\int_0^t\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}-\overline{\Psi}_t\tilde{S}_t$$

注意到 $\tilde{S}_0^0=1$,有

$$\tilde{V}_t(\hat{\Psi})=\hat{\Psi}_t^0+\overline{\Psi}_t\tilde{S}_t=\tilde{V}_0(\hat{\Psi})+\int_0^t\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}$$

其中,$\tilde{V}_0(\hat{\Psi})=V_0(\hat{\Psi})/S_0^0=\nu/S_0^0$,从而 $\hat{\Psi}=(\hat{\Psi}^0,\overline{\Psi})$ 是自筹资的。故 Ψ 同 $\hat{\Psi}$ 的折准净收益 $\tilde{G}_t$ 是相等的,且均为 $\int_0^t\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}$。

定理 1 下面两个关于市场存在套利的定义相互等价。

(1)市场存在套利,如果存在一自筹资策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$,满足 $V_0(\Psi)=0$,$V_T(\Psi)\geqslant 0$ 且 $P(V_T(\Psi)>0)>0$。

(2)市场存在套利,如果存在一自筹资策略 $\varphi=(\varphi^0,\overline{\varphi})$,满足 $\tilde{G}_T(\varphi)\geqslant 0$ 且 $P(\tilde{G}_T(\varphi)>0)>0$。

证明:(1)⇒(2),显然。

下面证(2)⇒(1)。设市场存在满足定义(2)的套利,即存在自筹资策略 $\varphi=(\varphi^0,\overline{\varphi})$ 满足(2)中的条件。令 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$,其中 $\Psi_0^0=-\overline{\varphi}_0S_0/S_0^0$,$\overline{\Psi}=\overline{\varphi}$ 由上述命题 2 知可以找到 Ψ_t^0,使得 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 是自筹资的,且 $\tilde{G}_T(\Psi)=\tilde{G}_T(\varphi)$。而

$$V_0(\Psi)=0=\tilde{V}_0(\Psi)$$
$$V_T(\Psi)=S_T^0\tilde{V}_T(\Psi)=S_T^0(\tilde{V}_T(\Psi)-\tilde{V}_0(\Psi))=S_T^0\tilde{G}_T(\Psi)=S_T^0\tilde{G}_T(\varphi)$$

由于 S_T^0 是严格正的,从而可知 Ψ 是满足定义 1 中条件的策略,使得市场存在满足定义 1 的套利。

注 ①简单地说,作折准是为了能够比较不同时期的钱的价值的大小。由定理可看到,当折准净收益严格大于零时,我们说有套利产生。如果初始资产不为零,将(2)中的折准净收益改为净收益,那么该定理不再成立。

②由两个套利定义的等价性可以看到,市场是否存在套利同以哪个资产做记账单位无关。

③命题 2 和定理 1 的离散情形见文献[6]。

定义 2 称一策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 是可取策略,如果策略 Ψ 是自筹资的且该策略的价值过程有下界,即存在常数 $C\geqslant 0$ 有 $V_t(\Psi)\geqslant -C$,$\forall t\in[0,T]$。记

$$K=\left\{\int_0^T\Psi_u\mathrm{d}(S_u^0,S_u)\mid \Psi\text{ 的初始资产 }V_0(\Psi)=0,\Psi\text{ 是可取的}\right\}$$

$$\tilde{K}=\left\{\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\mid \Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})\text{ 为自筹资策略},\int_0^t\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\geqslant -C/S_t^0,\forall t\in[0,T]\right\}$$

$$L_+^0=\{f;f\text{ 为随机变量且满足 }f\geqslant 0,p(f>0)=1\}$$

关于市场在原市场下无套利同折准市场无套利的关系,有如下的结论:

定理 2 $K\cap L_+^0=\{0\}\Leftrightarrow\tilde{K}\cap L_+^0=\{0\}$。

证明 (1)$\tilde{K}\cap L_+^0=\{0\}\Rightarrow K\cap L_+^0=\{0\}$,否则,存在一可取策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 满足

$$V_0(\Psi)=0,\quad V_T(\Psi)\geqslant 0,\quad P(V_T(\Psi)>0)>0$$

从而有

$$\tilde{V}_0(\Psi)=0,\quad \tilde{V}_T(\Psi)=(S_T^0)^{-1}V_T(\Psi)=\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u$$

故

$$\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\geqslant 0,\quad P\left(\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u>0\right)>0$$

又

$$\int_0^t\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u=(S_t^0)^{-1}V_t(\Psi)\geqslant -C/S_t^0$$

故与 $\tilde{K}\cap L_+^0=\{0\}$ 矛盾。

(2) $K\cap L_+^0=\{0\}\Rightarrow\tilde{K}\cap L_+^0=\{0\}$，否则，存在一策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 满足

$$\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\geqslant 0,\quad P\left(\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u>0\right)>0,\quad \int_0^t\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\geqslant -C/S_t^0$$

如同定理 1 第二部分的证明可以找到一策略 $\varphi=(\varphi^0,\overline{\varphi})$ 是自筹资的，且

$$V_0(\varphi)=0,\tilde{V}_t(\varphi)=\tilde{V}_t(\varphi)-\tilde{V}_0(\varphi)=\tilde{V}_t(\Psi)-\tilde{V}_0(\Psi)=\int_0^t\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u\geqslant -C/S_t^0$$

故有 $V_t(\varphi)\geqslant -C$，从而知策略 φ 是可取策略。又因为

$$V_T(\varphi)=S_T^0\int_0^T\overline{\Psi}_u\mathrm{d}\tilde{S}_u$$

与 $K\cap L_+^0=\{0\}$ 矛盾。

注　①上述定理中等价式的两边都可以作为市场无可取套利策略的数学表达式。

②由于策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 关于市场 $(1,\tilde{S})$ 的积分就等于 $\overline{\Psi}$ 关于 $\tilde{S}$ 的积分，而与初始策略无关，从而可以用 $\overline{\Psi}$ 来代替 Ψ。称 $\overline{\Psi}$ 是折准市场下的可取策略，相当于存在策略 $\Psi=(\Psi^0,\overline{\Psi})$ 是折准市场下的可取策略。

定义 3　称策略 Ψ 是折准可取的，如果该策略是自筹资的且存在一常数 $C\geqslant 0$，有 $V_t(\Psi)\geqslant -CS_t^0$，$\forall t\in[0,T]$。

在文献[3]中，作者引用了 Delbaen 和 Schachermayer 给出的一个例子。资产价格过程 $S=(1,R)$，其中 R 是 Bessel 过程，证明了如果选取风险资产作记账单位，那么关于折准可取策略满足 NFLVR，但是如果选取债券作记账单位，则市场存在套利，从这一例子可以看到折准可取策略同记账单位的选取有关。通常讨论的表达式记为 $\hat{K}=\{\int_0^T\overline{\Psi}\mathrm{d}\tilde{S}\mid\overline{\Psi}$ 是折准市场下的可取策略$\}$。

推论 1　若将 K 中的可取策略改为折准可取，并记之为 K'，那么有 $K'\cap L_+^0=\{0\}\Leftrightarrow\hat{K}\cap L_+^0=\{0\}$。

现在考虑以 $\sum_{i=0}^m S^i$ 作为记账单位，得到相应的 Σ 折准市场记为 $S^*=(\overline{S},1)$，其中，$\overline{S}=(\overline{S}^0,\cdots,\overline{S}^m)$，而 $\overline{S}^j=\dfrac{S^j}{\sum_{i=0}^m S^i}(j=0,\cdots,m)$。并记 Σ 折准市场下策略 $\hat{\Psi}=(\Psi,\Psi^{m+1})$ 的价值过程为 $\overline{V}(\hat{\Psi})$，其中的 $\Psi=(\Psi^1,\cdots,\Psi^m)$。

设策略 $\Psi^*=(\Psi,\Psi^{m+1})$ 是 Σ 折准市场下自筹资策略，那么有 $\overline{V}_t(\Psi^*)=\overline{V}_0(\Psi^*)+\int_0^t\Psi^*\mathrm{d}S^*=\overline{V}_0(\Psi^*)+\int_0^t\Psi\mathrm{d}\overline{S}$。

定理 3　下面两个关于市场存在套利的定义相互等价：

(1) 原市场存在套利，如果存在一自筹资策略 Ψ，满足 $V_0(\Psi)=0$，$V_T(\Psi)\geqslant 0$ 且 $P(V_T(\Psi)>0)>0$；

(2) Σ 折准市场存在套利，如果存在一自筹资策略 $\Psi^*=(\Psi,\Psi^{m+1})$，满足 $\int_0^T\Psi\mathrm{d}\overline{S}\geqslant 0$，$P\left(\int_0^T\Psi\mathrm{d}\overline{S}>0\right)>0$。

证明 (1)⇒(2) 设一自筹资策略 Ψ 是原市场下的套利策略。由自筹资定义知策略 $\Psi^* = (\Psi, 0)$ 是新市场下的自筹资策略且该策略的初始资产为 0,故

$$\bar{V}_T(\Psi^*) = \bar{V}_0(\Psi^*) + \int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S} = \int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S}$$

而

$$\bar{V}_T(\Psi^*) = \sum_{j=0}^{m+1} \Psi_T^j \frac{S_T^j}{\sum_{i=0}^{m} S_T^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} S_T^i} \sum_{j=0}^{m} \Psi_T^j S_T^j = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} S_T^i} V_T(\Psi)$$

由策略 Ψ 是原市场下的套利策略知策略 $\Psi^* = (\Psi, \Psi^{m+1})$ 是 Σ 折准市场下的套利策略。

(2)⇒(1) 设一自筹资策略 $\Psi^* = (\Psi, \Psi^{m+1})$ 是 Σ 折准市场下的套利策略。由命题 2 知可以取 Ψ'^{m+1} 使得策略 $\Psi'^* = (\Psi, \Psi'^{m+1})$ 也是自筹资策略且初始资产为 0。取 $\Psi_t'^i = \Psi_t^i + \Psi_t'^{m+1}(0 \leqslant i \leqslant m)$,那么很容易知道 Ψ' 是原市场下的自筹资策略。又

$$V_t(\Psi') = \sum_{i=0}^{m} \Psi_t'^i S_t^i = \sum_{i=0}^{m} \Psi_t^i S_t^i + \Psi_t'^{m+1} \sum_{i=0}^{m} S_t^i = \bar{V}_t(\Psi'^*) \sum_{i=0}^{m} S_t^i$$

故

$$V_0(\Psi') = 0, \quad V_T(\Psi') = (\bar{V}_T(\Psi'^*) - \bar{V}_0(\Psi'^*)) \sum_{i=0}^{m} S_T^i = \sum_{i=0}^{m} S_T^i \int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S}$$

由于 Ψ^* 是 Σ 折准市场下套利策略,从而知 Ψ' 是原市场下的套利策略。

定义 4 称策略 Ψ 是 Σ 折准可取策略,如果 Ψ 是自筹资的且存在一常数 $C \geqslant 0$,有 $V_t(\Psi) \geqslant -C \sum_{i=0}^{m} S_t^i, t \in [0, T]$。

注 这就是严加安所提出的可允许策略。

记 $\tilde{K}' = \{\int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S} \mid$ 自筹资策略 $\Psi^* = (\Psi, \Psi^{m+1})$ 满足 $\int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S} \geqslant -C / \sum_{i=0}^{m} S_t^i\}$,将 K 中的可取策略改为 Σ 折准可取策略并相应地记之为 K^1;记 $K^2 = \{\int_0^T \Psi \mathrm{d}\bar{S} \mid \Psi$ 是 Σ 折准市场下的可取策略$\}$,由定理 3 的证明很容易得到下面的命题 4,5。

命题 3 $K \cap L_+^0 = \{0\} \Leftrightarrow \tilde{K}' \cap L_+^0 = \{0\}$。

命题 4 $K^1 \cap L_+^0 = \{0\} \Leftrightarrow K^2 \cap L_+^0 = \{0\}$。

由上面的讨论可以看到,无论是以某一资产作折准还是以资产的总和作折准,市场存在套利策略的定义都是存在(Σ)折准净收益严格大于 0 的策略,且市场是否存在套利同记账单位的选取无关。市场无可取套利策略等价于折准市场无折准净收益大于 $\{-C/$记账单位$\}$ 的套利策略。市场无(Σ)折准可取套利策略等价于(Σ)折准市场无可取套利策略。市场的折准可取策略同记账单位的选取有关,当记账单位严格有界时折准可取策略同可取策略是一致的,否则不一致。

参 考 文 献:

[1] Yan J A. A New Look at the Fundamental Theorem of Asset Pricing[J]. J. Korean Math. Soc., 1998,35(3):659-673.

[2] Delbaen F,Schachermayer W. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing[J]. Math. Ann., 1994,300:463-520.

[3] Xia J M,Yan J A. A New Look at Some Basic Concepts in Arbitrage Pricing Theory,Academy of Mathematics and System Sciences[J]. Science in China, 2003,46(6).

[4] Schachermayer W. No Arbitrage:On the Work of David Kreps[J]. W. Schachermager Positivity, 2002,3(6):359-368.

[5] Harrison M J,Pliska S R. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trad-ing[J]. Stochastic Processes and Their Applications 1981, (Ⅱ):215-260.

[6] 雍炯敏,Cont R. 数学金融学——理论与实践[M]. 北京:高等教育出版社,2000.