

文章编号 :1001 - 2486(2005)01 - 0055 - 05

二维衰减谐波估计的四阶混合累积量方法*

高勋章, 黎 湘, 庄钊文

(国防科技大学 ATR 实验室, 湖南 长沙 410073)

摘 要 :针对二维衰减谐波估计方法在大样本容量条件下计算量过大的问题,提出了一种基于二维四阶混合累积量的 ESPRIT 方法。在不影响估计精度的前提下,通过保持特征矩阵结构不变,有效地减小了算法的计算量。利用四阶混合累积量对高斯噪声的自动抑制,降低了参数估计的信噪比门限并提高了估计精度。仿真实验表明,在高斯色噪声条件下该方法的计算效率和估计性能优于现有方法。

关键词 :四阶混合累积量 ;二维衰减谐波 ;谐波恢复 ;高斯色噪声

中图分类号 :TN957.51 文献标识码 :A

Two-dimensional Damped Sinusoids Estimation
Based on the Fourth-order Mixed Cumulants

GAO Xun-zhang, LI Xiang, ZHUANG Zhao-wen

(ATR Lab, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract :A new method for two-dimensional damped sinusoids estimation in colored Gaussian noise, called two-dimensional fourth-order mixed cumulants based on ESPRIT (2d-FOMCESPRIT), is presented. The amount of computations is greatly reduced by holding the dimensions of the feature matrix compared with that of the former methods in the presence of a long record. Due to FOMC's auto suppressing Gaussian noise, the SNR threshold is reduced and the precision of the parameter estimation is improved. Simulation results show that this method is of better performance and higher efficiency than the former methods in colored Gaussian noise.

Key words :Fourth-Order Mixed Cumulants (FOMC); two-dimensional damped sinusoids ; harmonic retrieval ; colored Gaussian noise

衰减谐波估计(亦称谐波恢复)在雷达、声纳、地震等领域有着非常广泛的应用。二维衰减谐波估计的参数化方法主要有矩阵束方法^[1]、线性预测方法^[2]和空间旋转不变方法^[3]等。由于都需要进行扩阶汉克尔矩阵的奇异值分解,因此当样本容量较大时,这些方法的计算量就会非常大。在雷达成像的过程中,为了减小计算量,通常需要对测量数据进行二次采样。在信噪比较低时,这种处理会影响散射中心的估计精度,而且二次采样还会使成像不模糊距离减小。此外,在色噪声背景下这些方法的估计精度并不理想。

由于加性噪声中的衰减谐波是非平稳随机过程,因而不能直接采用统计平均意义上的高阶统计量来进行噪声抑制处理。针对加性平稳噪声中确定性信号的估计问题,文献[4]提出了混合累积量的概念(文献[5]称之为广义累积量,文献[6]也采用了类似的方法),并证明了混合累积量也具有盲高斯性。仿真实验表明,在信噪比较高而且样本容量适中的条件下,现有的矩阵束和 ESPRIT 等方法就能达到足够高的估计精度,进一步增加样本容量并不能使精度再有显著提高。基于以上两点,本文提出采用四阶混合累积量代替测量数据,构成具有较高信噪比的特征矩阵,并通过限定特征矩阵的维数来减小计算量。同时,当样本容量增加时,尽管特征矩阵维数不变,但能提高混合累积量的估计精度,从而提高信号参数的估计精度。

* 收稿日期 2004 - 08 - 26

基金项目 :国家自然科学基金资助项目(69901005)

作者简介 :高勋章(1972—)男,讲师,博士生。

1 复衰减谐波的二维四阶混合累积量

加性复高斯噪声中的二维复衰减谐波信号可以表示为：

$$y(m, n) = x(m, n) + v(m, n) \quad (1)$$

$$x(m, n) = \sum_{k=1}^K a_k \cdot \exp[(d_{1k} + j\omega_{1k})m + (d_{2k} + j\omega_{2k})n] \quad (2)$$

其中 $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$, $d_{1k} < 0$, $d_{2k} < 0$ 。 $y(m, n)$ 为测量数据, $x(m, n)$ 表示待估信号, $v(m, n)$ 为平稳零均值复高斯色噪声, 与 $x(m, n)$ 相互独立, 且实部与虚部独立同分布。为了处理单记录条件下高斯噪声中的确定性谐波估计问题, 文献 [4] 提出了混合累积量的概念, 并证明了混合累积量也具有盲高斯性。本文将这一概念推广到二维。在 $y(m, n)$ 满足所谓混合条件时, 定义复随机过程 $y(m, n)$ 二维 DE 模型四阶混合累积量为：

$$\tilde{C}_{4y}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32}) \triangleq \widetilde{\text{cum}}\{y(m, n) y^*(m + \tau_{11}, n + \tau_{12}) y(m + \tau_{21}, n + \tau_{22}), y^*(m + \tau_{31}, n + \tau_{32})\} \quad (3)$$

其中,

$$\widetilde{\text{cum}}(s_1, s_2, s_3, s_4) \triangleq \tilde{E}(s_1 s_2 s_3 s_4) - \tilde{E}(s_1 s_2) \tilde{E}(s_3 s_4) - \tilde{E}(s_1 s_3) \tilde{E}(s_2 s_4) - \tilde{E}(s_1 s_4) \tilde{E}(s_2 s_3) \quad (4)$$

$$\tilde{E}\{f(m, n)\} \triangleq \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} E\{f(m, n)\} \quad (5)$$

考虑到 DE 模型为有限能量信号, 因此与文献 [4] 相比, 上述定义中去掉了时间平均因子。

不难证明, 若 $x(m, n)$ 为直到四阶准平稳, 则有：

$$\tilde{C}_{4y}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32}) = \tilde{C}_{4x}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32}) \quad (6)$$

令 $\tau_{11} = \tau_{21} = \tau_{31}$, $\tau_{12} = \tau_{22} = \tau_{32}$, 则 $y(m, n)$ 的二维四阶混合累积量对角切片为：

$$\tilde{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2) \triangleq \widetilde{\text{cum}}\{y(m, n) y^*(m - \tau_1, n - \tau_2) y(m - \tau_1, n - \tau_2) y^*(m - \tau_1, n - \tau_2)\} \quad (7)$$

在有限长单记录情形下, $\tilde{E}\{f(m, n)\}$ 的样本估计子为^[5]：

$$\hat{E}\{f(m, n)\} \triangleq \frac{1}{MN} \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} f(m, n) \quad (8)$$

为了使 $\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 与 (2) 式具有相同的谐波频率和衰减因子, 将文献 [6] 中协方差类型估计子的上下限取法推广到二维, 令：

$$M_1 = \tau_1, \quad M_2 = M - \tau_{1\max} + \tau_1 - 1 \quad (9)$$

$$N_1 = \tau_2, \quad N_2 = N - \tau_{2\max} + \tau_2 - 1 \quad (10)$$

将 (1)、(2)、(8)~(10) 式代入 (7) 式, 根据混合累积量的盲高斯性, 化简得 $\tilde{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 的有限样本估计子：

$$\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2) = \hat{c}_{4x}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{k=1}^K b_k \cdot \exp[(d_{1k} + j\omega_{1k})\tau_1 + (d_{2k} + j\omega_{2k})\tau_2] \quad (11)$$

其中,

$$b_k = -2 \sum_{l, j=1}^K \frac{a_k a_l^* a_i a_j^*}{(1 - p_1)(1 - p_2)} = a_k \cdot \sum_{l, j=1}^K \frac{-2 a_l^* a_i a_j^*}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \quad (12a)$$

$$p_1 = \exp[(d_{1k} + d_{1l} + d_{1i} + d_{1j}) + j(\omega_{1k} - \omega_{1l} + \omega_{1i} - \omega_{1j})] \quad (12b)$$

$$p_2 = \exp[(d_{2k} + d_{2l} + d_{2i} + d_{2j}) + j(\omega_{2k} - \omega_{2l} + \omega_{2i} - \omega_{2j})] \quad (12c)$$

其中 b_k 是与 τ_1, τ_2 无关的常数项系数。从 (11) 式可知, $\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 与 $x(n)$ 具有相同的谐波个数、衰减因子和谐振频率, 而信号中的加性高斯噪声被自动抑制。

2 二维衰减谐波估计的 2d-FOMCESPRIT 方法

由上一节的结论得到启发, 如果用 $\hat{c}(\tau_1, \tau_2)$ 取代原始样本数据构造新特征矩阵来进行估计, 可以

提高精度。基于此,提出了基于混合累积量和二维 ESPRIT 的 2d-FOMCESPRIT 方法。为节省篇幅,重点叙述该方法的特征矩阵构造过程,有关二维 ESPRIT 方法(2d-ESPRIT)的详细原理及步骤请参看文献[13]。

(1) 对测量数据去均值,得到零均值测量数据 $y'(m, n)$ 。

(2) 依(4)、(7)、(8)式估计 $\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 。

(3) 构造二维四阶混合累积量的扩阶 Hankel 矩阵 \hat{C} (特征矩阵)。滑动窗大小为 $P \times Q$ 。

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{(0)} & \hat{C}_{(1)} & \cdots & \hat{C}_{(\tau_{1\max}-P+1)} \\ \hat{C}_{(1)} & \hat{C}_{(2)} & \cdots & \hat{C}_{(\tau_{1\max}-P+2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{C}_{(P-1)} & \hat{C}_{(P)} & \cdots & \hat{C}_{\tau_{1\max}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,

$$\hat{C}_{(\tau)} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}(\tau, 0) & \hat{\alpha}(\tau, 1) & \cdots & \hat{\alpha}(\tau, \tau_{2\max}-Q+1) \\ \hat{\alpha}(\tau, 1) & \hat{\alpha}(\tau, 2) & \cdots & \hat{\alpha}(\tau, \tau_{2\max}-Q+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\alpha}(\tau, Q-1) & \hat{\alpha}(\tau, Q) & \cdots & \hat{\alpha}(\tau, \tau_{2\max}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

为了使 \hat{C} 的秩等于谐波个数,一般取 $P \in [K+1, (M+1)/2]$, $Q \in [K+1, (N+1)/2]$, 其中 M 和 N 分别为样本矩阵的行和列数^[1]。本文选取滑动窗的方法是:首先预估计一个较大的模型阶数 K' ($K' > K$), 并令 $\tau_{1\max} = 2 \sim 3K'$, $\tau_{2\max} = 2 \sim 3K'$, 再选取 $P = \text{round}\{(\tau_{1\max} + 1)/2\}$, $Q = \text{round}\{(\tau_{2\max} + 1)/2\}$, round 表示取整运算。这种选取方法可以使 \hat{C} 的行数和列数与样本容量无关,而仅与预估计的模型阶数 K' 有关。另一方面,如果测量数据的信噪比较高,当样本容量增加到合适的大小后,再增大样本容量并不能显著提高矩阵束和 ESPRIT 方法的估计精度。同样,如果 $\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 的估计误差较小,当 $\tau_{1\max}(\tau_{2\max}) = 2 \sim 3K' \geq 2 \sim 3K$ 时,再增大 $\tau_{1\max}(\tau_{2\max})$ 也不能显著提高估计精度。因此将 $\tau_{1\max}(\tau_{2\max})$ 保持在合适的大小,不使之随样本容量的增加而增大,并不会影响方法的估计性能。由于步骤(2)中所求出的四阶混合累积量的估计是一致渐近估计^[5], 因此随着样本容量的增加,特征矩阵 $\hat{c}_{4y}(\tau_1, \tau_2)$ 的估计精度会相应提高,从而提高整个算法的估计精度。由于 2d-ESPRIT 方法直接采用测量数据构造 Hankel 矩阵,因而其维数会随样本容量的增加而增大,进而导致计算量急剧增加。

(4) 利用步骤(3)构造的分块矩阵 \hat{C} , 采用 2d-ESPRIT 方法,估计出衰减因子和谐波频率。

3 仿真实验

实验 1: 计算量对比。本节就计算量对 2d-FOMCESPRIT 和 2d-ESPRIT 方法进行了对比分析。表 1 为不同样本容量时两种方法的计算量对比情况。 $K=3$, 在 2d-FOMCESPRIT 方法中 K' 取 5, $\tau_{1\max} = \tau_{2\max} = 14$, $P=Q=7$; 在 2d-ESPRIT 方法中 $P=M/2$, $Q=N/2$ 。由表 1 可知,当样本容量 $M(N) \geq 64$ 后, 2d-ESPRIT 方法的计算量开始急剧增加, 2d-FOMCESPRIT 方法的计算量却增加较少。

表 1 计算量对比(数据长度 $M = N$, 单位 flop)

Tab. 1 Comparison of Computation amount(data length $M = N$, unit flop)

数据长度($N = M$)	30	40	50	60	80	160
2d-ESPRIT	2.54E+0.5	1.11E+07	1.64E+08	9.80E+08	1.19E+10	2.15E+12
2d-FOMCESPRIT	8.87E+06	1.00E+07	1.18E+07	1.40E+07	2.02E+07	6.70E+07

实验 2 样本容量对均方误差的影响。信号模型如式(1)、(2)所示 $\omega_{1k} = 2\pi f_{1k}$ $\omega_{2k} = 2\pi f_{2k}$ 。其中：
 $K = 2$ $(f_{11}, f_{21}) = (0.1, 0.15)$ $(f_{12}, f_{22}) = (0.3, 0.4)$ $(d_{11}, d_{21}) = (-0.003, -0.005)$ $(d_{12}, d_{22}) = (-0.006, -0.004)$ 。
 零均值复高斯色噪声 $\nu(m, n)$ 由高斯白噪声通过二维 FIR 色滤波器得到。从图 1、2 中可以看出，参数估计值的均方误差随样本容量的增加而逐渐减小，即 2d-FOMCESPRIT 方法的估计精度会随样本容量的增加而提高。每个数据长度的 Monte Carlo 实验次数为 200。

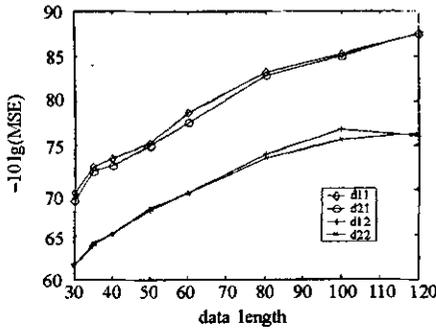


图 1 衰减因子估计均方误差
 Fig. 1 MSE of damped factors

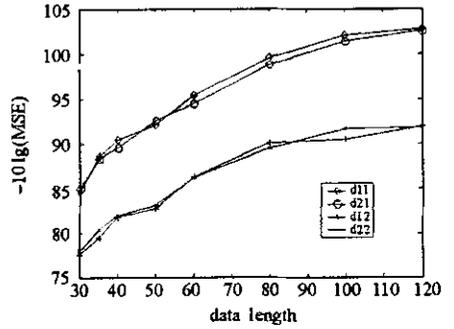


图 2 频率估计均方误差
 Fig. 2 MSE of frequencies

实验 3 估计偏差和信噪比门限。信号模型同实验 1，参数设置为：

$$K = 3; (f_{11}, f_{21}) = (0.24, 0.24), (f_{12}, f_{22}) = (0.24, 0.26), (f_{13}, f_{23}) = (0.26, 0.24)$$

$$(d_{11}, d_{21}) = (-0.08, -0.08), (d_{12}, d_{22}) = (-0.08, -0.05), (d_{13}, d_{23}) = (-0.05, -0.08)$$

图 3、4 所示分别是信噪比为 20dB、 $M = N = 30$ 时两种方法的谐波频率估计结果(Monte Carlo 实验各 100 次)。“+”表示频率的正确位置，单个实心圆点表示单次估计结果。由图 3 可见，受色噪声影响 2d-ESPRIT 方法未能估计出第一个谐波频率，其有效估计门限在 25dB 左右。

表 2 所示是谐波频率的有效估计门限随样本容量变化的情况。对每个数据长度进行 100 次 Monte Carlo 实验，且只考虑信噪比取整数的情形。从表中可以看出：在样本容量较大时 2d-FOMCESPRIT 方法的信噪比门限要比 2d-ESPRIT 方法低得多，这进一步说明了 2d-FOMCESPRIT 方法的高斯色噪声抑制能力要强于 2d-ESPRIT 方法。

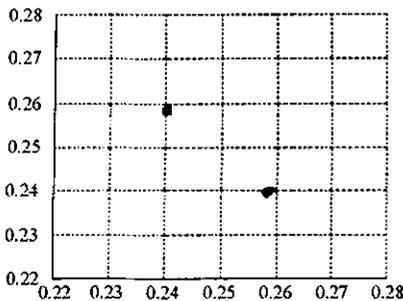


图 3 2d-ESPRIT 方法的估计结果
 Fig. 3 Result of 2d-ESPRIT method

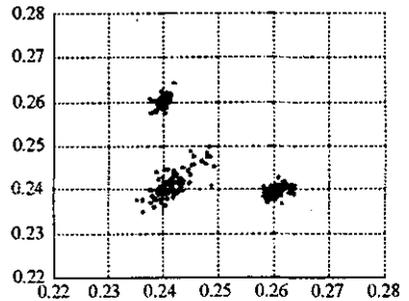


图 4 2d-FOMCESPRIT 方法的估计结果
 Fig. 4 Result of 2d-FOMCESPRIT method

表 2 谐波频率的有效估计门限(dB)

Tab. 2 Efficient estimation threshold of frequencies(dB)

数据长度($M = N$)	30	35	40	50	60	80	160
2d-ESPRIT	25	22	21	19	20	17	—
2d-FOMCESPRIT	20	18	14	8	-5	-5	-6

4 结论

利用四阶混合累积量对高斯噪声的自动抑制作用,提出了一种基于四阶混合累积量的二维衰减谐波估计方法。通过保持特征矩阵结构不变,该方法较好地解决了现有方法在大样本容量时计算量过大的问题。仿真实验表明,该方法不仅具有较强的高斯色噪声抑制能力,而且可以通过增加样本容量显著地提高估计精度。

参考文献:

- [1] Hua Y. Estimating Two-dimensional Frequencies by Matrix Enhancement and Matrix Pencil[J]. IEEE Trans. on Signal Processing ,1992 , 40(9) 2267 - 2280.
- [2] Sacchini J J , Steedly W M. Two-dimensional Prony Modeling and Parameter Estimation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing ,1993 41 (11) 3127 - 3136.
- [3] Rouquette S , Najim M. Estimation of Frequencies and Damping Factors by Two-dimensional ESPRIT Type Methods[J]. IEEE Trans. on Signal Processing ,2001 49(1) 237 - 245.
- [4] Anderson J M , Giannakis G B , Swami A. Harmonic Retrieval Using Higher Order Statistics : A Deterministic Formulation[J]. IEEE Trans. on Signal Processing. 1995 43(8) :1880 - 1889.
- [5] Dandawate A V , Giannakis G B. Asymptotic Theory of Mixed Time Averages and kth-order Cyclic-moment and Cumulant Statistics[J]. IEEE Trans. on Information Theory , 1995 41(1) 216 - 232.
- [6] Ruiz D P , Carrion M C , Gallego A et al. Parameter Estimation of Exponentially Damped Sinusoids Using a Higher Order Correlation-based Approach[J]. IEEE Trans. on Signal Processing ,1995 43(11) 2665 - 2677.

(上接第 54 页)

参考文献:

- [1] Gonzales R C , Woods R E. Digital Image Processing[M]. MA : Addison-Wesley , 1995.
- [2] Dippel S , Stahl M , Wiemker R , et al. Multiscale Contrast Enhancement for Radiographies : Laplacian Pyramid Versus Fast Wavelet Transform[J]. IEEE Trans. Medical Imaging , 2002 , 21(4) : 343 - 353.
- [3] Laine A F , Schuler S , Fan J et al. Mammographic Feature Enhancement by Multiscale Analysis[J]. IEEE Trans. Medical Image , 1994 , 13(4) : 725 - 750.
- [4] Starck J L , Murtagh F , Candes E J et al. Gray and Color Image Contrast Enhancement by the Curvelet Transform[J]. IEEE Trans. Image Processing , 2002.
- [5] Mallat S. A Wavelet Tour of Image Processing[M]. Academic Press , 1997.
- [6] Coifman R R , Donoho D L. Translation-invariant Denoising[M]. A. Antoniadis and G. Oppenheim. Berlin , Springer , Wavelets and Statistics. 1995.
- [7] Pan Q , Pan Z , Dai G , Zhang H. Two Denoising Methods by Wavelet Transform[J]. IEEE Trans. Image Processing , 1999 , 47(12) : 3401 - 3406.
- [8] Sendur L , Selesnick I W. A Bivariate Shrinkage Function for Wavelet Based Denoising[C]. IEEE ICASSP , 2002.
- [9] Greenspan H , Anderson C H , Akber S. Image Enhancement by Extrapolation Infrequency Space[J]. IEEE Trans. Image Processing , 2000 , 9 : 1035 - 1048.
- [10] Donoho D L. De-noising by Soft-thresholding[J]. IEEE Trans. Inform. Theory , 1995 , 41 : 613 - 627.
- [11] Chang S , Yu B , Vetterli M. Image Denoising Via Lossy Compression and Wavelet Thresholding[J]. IEEE Trans. Image Processing , 2000 , 9 : 1532 - 1546.

