

文章编号: 1001-2486(2005)01-0102-04

## 非结构网格上解二维 Hamilton-Jacobi 方程的自适应算法\*

朱思美, 宋松和

(国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 提出了一种非结构网格上解 Hamilton-Jacobi 方程的自适应局部加密方法。讨论了加密方法关键的一步: 光滑度指标的确定, 通过采取无振荡插值, 得到了无振荡数值格式, 典型算例表明, 该方法只需增加少量的点和计算量却能够提高计算精度和对间断的分辨能力。

**关键词:** Hamilton-Jacobi 方程; 自适应加密法; 非结构网格

**中图分类号:** O174      **文献标识码:** A

## An Adaptive Method for Two-dimensions Hamilton-Jacobi Equations on Unstructured Meshes

ZHU Si mei, SONG Song-he

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** An adaptive method for Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes is given, the paper presents the key ingredient to choose smooth indicator. Using non-oscillatory interpolation it gets the essentially non-oscillatory scheme. Extensive numerical experiments show that the adaptive methods can also produce high resolution and improve the accuracy with small grid points if grid adaptation is employed.

**Key words:** Hamilton-Jacobi equations; adaptive methods; unstructured meshes

Hamilton-Jacobi(以下简称 H-J) 方程在众多领域, 如最优控制、计算机图形图像、网格生成等, 有着非常重要的应用。由于 Hamilton-Jacobi 方程的解析解是难以求出的, 而且其弱解不惟一, 解的导数即使在初值非常光滑的情况下也会出现间断, 导致解曲面(线)出现尖点或纽结<sup>[3]</sup>。为提高 Hamilton-Jacobi 方程解的精度, Osher 和 Shu 等人提出了 ENO 方法<sup>[4]</sup>, 但此方法随着精度的提高, 计算量加大。如何做到利用低价格和少量的点也可以得到高精度的解, 提高对间断的分辨能力, 这就需要发展高效的解非线性 H-J 方程的自适应算法。Zhang 等人发展的解 H-J 的自适应算法提高了解的精度和对间断的分辨率<sup>[5]</sup>, 但实施计算时运算量大。本文讨论了非结构网格上通过光滑度指标来处理间断处的局部自适应加密法, 数值实验表明, 该法既能提高对间断的分辨率, 又节省了计算量。

## 1 自适应法概要

考虑二维 H-J 方程的初值问题:

$$\begin{cases} \phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0 \\ \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $H$  与  $\phi_0$  为 Lipschitz 连续函数,  $\Omega$  为其求解区域。对  $\Omega$  作三角网格剖分  $T_h$ , 定义以节点  $i$  为顶点的三角形为  $T_0, \dots, T_k$ ,  $\theta_i$  为三角形  $T_l$  在节点  $i$  处的内角,  $n_{l+\frac{1}{2}}$  为沿三角形单元  $T_l$  与  $T_{l+1}$  公共边方向向外的单位向量, 如图 1。

\* 收稿日期: 2004-09-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10001038); 国防科技大学基础研究资助项目

作者简介: 朱思美(1979-), 女, 硕士生。

## 1.1 无振荡数值格式

H-J 方程(1)在非结构网格上空间半离散数值格式为:

$$\frac{d}{dt}\phi_i(t) + H((\cdot, \cdot)\phi)_0, \dots, (\cdot, \cdot)\phi)_{k_i} = 0 \quad (2)$$

在计算中取 Abgrall 提出的 Lax-Friedrichs 型数值 Hamilton 函数<sup>[1]</sup>, 即:

$$H((\cdot, \cdot)\phi)_0, \dots, (\cdot, \cdot)\phi)_{k_i} = H\left(\frac{\sum_{l=0}^{k_i} \theta_l (\cdot, \cdot)\phi)_l}{2\pi}\right) - \frac{\alpha}{\pi} \sum_{l=0}^{k_i} \beta_{l+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{(\cdot, \cdot)\phi)_l + (\cdot, \cdot)\phi)_{l+1}}{2}\right) \cdot \vec{n}_{l+\frac{1}{2}}$$

其中,  $\beta_{l+\frac{1}{2}} = \tan\left(\frac{\theta_l}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_{l+1}}{2}\right)$ ,  $\alpha = \max\left\{\max_{\substack{A \leq u \leq B \\ C \leq v \leq D}} |H_1(u, v)|, \max_{\substack{A \leq u \leq B \\ C \leq v \leq D}} |H_2(u, v)|\right\}$ ,  $H_1$  与  $H_2$  是  $H$  关于  $u, v$  的偏导数,  $[A, B]$  与  $[C, D]$  分别是  $(\phi_x)$  与  $(\phi_y)_l$  的取值范围。

在时间上采用与格式(2)同阶的二阶 TVD Runge-Kutta 方法离散, 即:

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \phi^{(0)} + \Delta t L(\phi^{(0)}) \\ \phi^{(2)} = \frac{1}{2}\phi^{(0)} + \frac{1}{2}\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(\phi^{(1)}) \end{cases} \quad (3)$$

本文用 ENO 思想来求  $\phi$  在单元  $\Delta_0$  上二次线性插值函数  $P(x, y)$ <sup>[7]</sup>, 设  $P(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$ , 对三角形单元  $\Delta_0$  周围的三角形进行分组:  $(i, j, k, 1, 2, 3)$ ,  $(i, j, k, 4, 5, 6)$ ,  $(i, j, k, 7, 8, 9)$ ,  $(i, j, k, 2, 5, 8)$ , 如图 2。利用这四组的点的坐标及相应的函数值, 在一定的条件下, 通过求解四个六元线性方程组, 得到四个二次多项式, 记为:  $P_1(x, y)$ ,  $P_2(x, y)$ ,  $P_3(x, y)$ ,  $P_4(x, y)$ , 在这四个多项式中挑选一个  $\omega_i$  值最小(最“光滑”)的多项式作为单元  $\Delta_0$  上的 ENO 多项式, 记为  $P(x, y)$ , 其中,  $\omega_i =$

$$\left|\frac{\partial^2 P_i(x, y)}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 P_i(x, y)}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 P_i(x, y)}{\partial x \partial y}\right| \quad (i = 1, 2, 3, 4)。$$

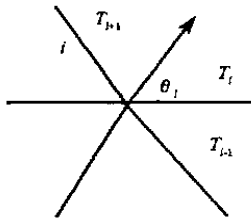


图 1 节点  $i$  和以它为顶点的扇形区  
Fig. 1 Node  $i$  and its angular sectors

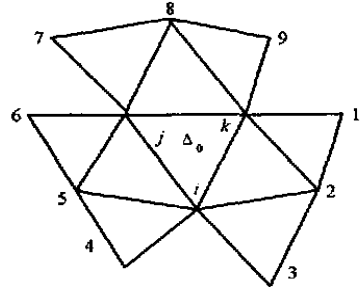


图 2 数值格式中所需最大模板的节点分布  
Fig. 2 The nodes used for the big stencil of the scheme

## 1.2 自适应加密准则和加密形式

为加密的需要定义光滑度指标, 对于三角单元  $\Delta_l$ , 设置其光滑度指标为:

$$\omega_l = \left|\frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 P_l}{\partial x \partial y}\right| + \left|\frac{\partial^2 P_l}{\partial y^2}\right|$$

其中,  $P_l$  为三角单元  $\Delta_l$  上的 ENO 多项式。由于 H-J 方程的解曲面在某些地方发生很大的形变, 上述的光滑度指标  $\omega_l$  能够正确描述 H-J 方程解的形变的发生区域。若选择单元上的一阶导数的绝对值之和作为加密的光滑度指标, 算例的试验结果发现加密的区域扩大且落在解曲面形变的周围, 而间断处需要加密的地方却没有加密, 没有达到加密的目的。定义加密阈值:  $c_0 = \varepsilon \max\{\omega_l, (1 \leq l \leq n)\} (0 \leq \varepsilon \leq 1)$ 。对于  $\omega_l > c_0$  三角形单元进行加密, 加密的方法是连接其三边上的中点一分为四, 处于加密与非加密交界处的三角形单元一分为二, 如图 3、4。

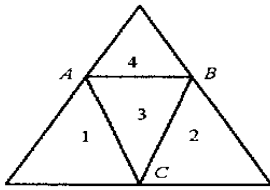


图3 一分为四的加密单元

Fig. 3 The cell which is divided into four cells

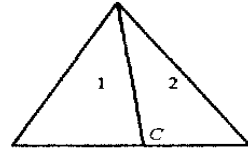


图4 一分为二的加密单元

Fig. 4 The cell which is divided into two cells

### 1.3 加密单元新节点的插值

设加密单元为  $\Delta_i$ , 其上的 ENO 多项式为  $P(x, y)$ , 增加的节点  $A$  的值由  $P(x, y)$  插值得到, 即  $\phi(A) = P(x_A, y_A)$ , 同理可计算出  $B, C$  点的函数值。

### 1.4 自适应加密的二阶无振荡数值方法步骤

- (1) 对求解区域进行三角剖分, 并在初始网格上赋初值。
- (2) 确定单元上的 ENO 多项式。
- (3) 计算节点  $i$  的函数值  $\phi_i$  和各单元上的光滑度指标  $\alpha_i$ , 求出阈值  $c_0$ 。
- (4) 判断要加密的单元, 形成新的三角网格剖分。
- (5) 修正初始网格上加密区的三角形单元信息及节点信息。
- (6) 由格式(2)及(3)计算新网格上的节点值。

## 2 典型算例及结论

通过两个例子来检验自适应加密方法的效果。

例1 解 Burgers 方程:

$$\begin{cases} \phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0 \\ \phi(x, y, 0) = -\cos\pi\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{cases} \quad -2 \leq x, y \leq 2$$

with a nonconvex  $H$ :

$$H(u, v) = -\cos(u + v + \alpha)$$

计算中取  $\alpha = 1$ , 步长均为  $0.2$ ,  $t = 1.5/\pi^2$ , 网格如图 5, 计算结果见图 6, 7。

例2 周期初边值问题:

$$\begin{cases} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x + \phi_y + 1)^2 = 0 \\ \phi(x, y, 0) = -\cos(\pi x) \end{cases} \quad -1.2 \leq x, y \leq 0.8$$

计算中取步长  $h_x = h_y = 0.1$ ,  $t = 1.5/\pi^2$ , 网格如图 8, 计算结果见图 9, 10。

从计算结果可以看出, 使用自适应局部加密法增强了对间断处的分辨能力, 使尖点更加突出, 提高了解的精度, 从加密网格图可以很明显地看出解曲面的形变发生区域。本文在计算中使用加密法与未使用加密法所取的时间步长相同, 此自适应局部加密法与文献[5]的加密法相比, 计算量要少。每加密一个单元就增加 3 个结点, 可以使加密的三角形单元的边长缩到原来的  $1/2$ , 加密效率为  $2/3$ 。

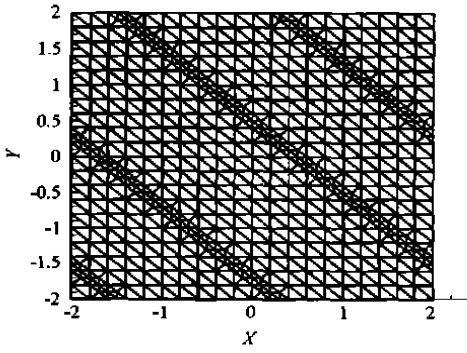


图 5 例 1 的加密网格

Fig. 5 The adaptive mesh of example 1

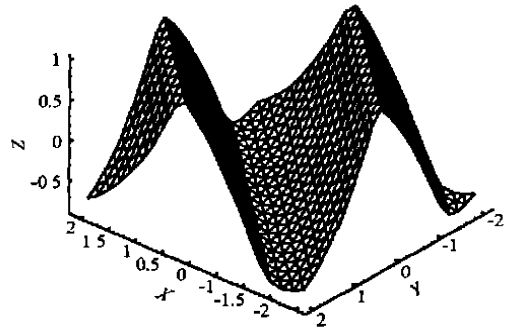


图 6 未使用加密法计算例 1

Fig. 6: The result without using adaptive mesh of example 1

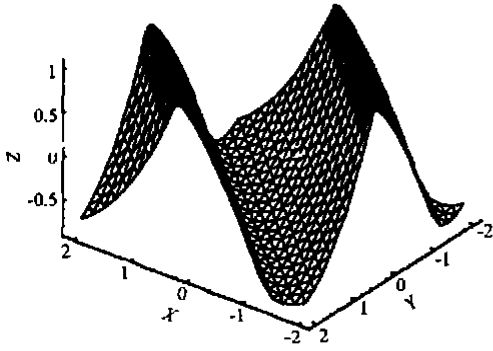


图 7 使用加密法计算例 1

Fig. 7 The result using adaptive mesh of example 1

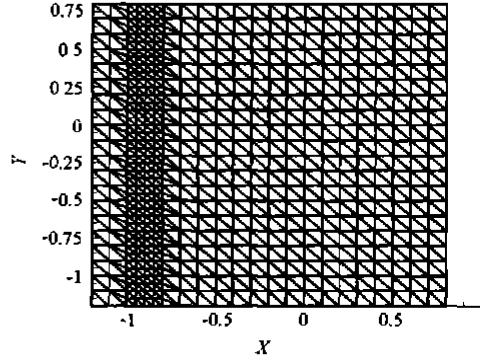


图 8 例 2 的加密网格

Fig. 8 The adaptive mesh of example 2

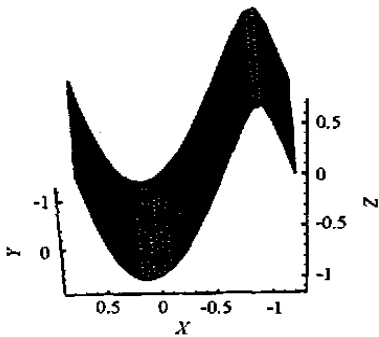


图 9 未使用加密方法计算例 2

Fig. 9 The result without using adaptive mesh of example 2

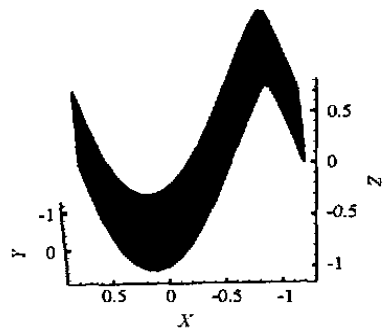


图 10 使用加密方法计算例 2

Fig. 10 The result using adaptive mesh of example 2

参考文献:

[ 1 ] Abgrall R. Numerical Discretization of the First-order Hamilton-Jacobi Equation on Triangular Meshes[J]. Comm. on Pure and Appl. Math., 1996, 49: 1339- 1373.

[ 2 ] Barth T J, Sethian J A. Numerical Schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains[J]. J. Comput. Phys., 1998, 145: 1- 40.

[ 3 ] Lafon F, Osher S. High Order Two Dimensional Non-oscillatory Methods for Solving Hamilton-Jacobi Equations[J]. J. Comput. Phys., 1996, 123: 235- 253.

[ 4 ] Osher S, Shu C W. High-order Essentially Non-oscillatory Schemes for Hamilton-Jacobi Equations[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1991, 28: 907- 922.

[ 5 ] Tang H Z, Tang T, Zhang P. An Adaptive Mesh Redistribution Method for Nonlinear Hamilton-Jacobi Equations in Two and three dimensions[J]. J. Comput. Phys., 2003: 188: 543- 572.